

# Дискретная математика

## Глава 1. Множества и отображения

А. В. Пастор

04.09.2026

## Дополнительные материалы по теории множеств

1. В. Серпинский, *О теории множеств*. М.: Просвещение, 1966.
2. Н. Я. Виленкин, *Рассказы о множествах*. М.: МЦНМО, 2005.
3. Т. Йех, *Теория множеств и метод форсинга*. М.: Мир, 1973.  
(Для тех, кто интересуется аксиоматикой теории множеств.  
Я бы не рекомендовал читать эту книгу на первом курсе,  
но если кому-то интересно, можете попробовать...)

Слайды по дискретной математике будут публиковаться по адресу

<https://logic.pdmi.ras.ru/~pastor/ITMO/2026-27/>

- Неформально, **множество** — это произвольная совокупность объектов.
  - ▶ Объекты, из которых состоит множество, называются **элементами**.
  - ▶ Элементами множества могут быть любые рассматриваемые в математике объекты: числа, точки, фигуры, а также другие множества.
  - ▶ Принадлежность элемента  $x$  множеству  $Y$  обозначается  $x \in Y$ .
  - ▶ Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается  $\emptyset$ .
- Можно дать математически строгое определение понятия множества, задав его аксиоматически. Но это сложно и находится за рамками данного курса.
  - ▶ Формально, элементами множества тоже являются множества.
  - ▶ Другие объекты нужно кодировать при помощи тех или иных множеств.

## Задание множеств

- **Перечисление элементов:** элементы множества перечисляются через запятую в фигурных скобках.
  - ▶ Этот способ подходит для конечных множеств.

### Пример

$$Y = \{1, 3, 7, 19, 2025\}.$$

- **Задание подмножества при помощи условия:**

$Y = \{x \in X \mid \text{условие на } x\}$  — множество, состоящие из всех элементов множества  $X$ , удовлетворяющих данному условию.

### Пример

$$Y = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \div 2\} \text{ — множество всех четных чисел.}$$

- ▶ Если все элементы множества  $Y$  принадлежат множеству  $X$ , то  $Y$  называется **подмножеством** множества  $X$ . Обозначение:  $Y \subset X$ .
  - $\mathcal{P}(X)$  — множество всех подмножеств множества  $X$ .
- ▶ Можно также писать  $Y = \{x \mid \text{условие на } x\}$ , но это **не обязательно множество!**
  - Такие совокупности множеств называют **классами**.

## Проблемы и парадоксы теории множеств

- Попытки задать понятие множества неформально приводят к ряду вопросов, на которые трудно дать ответ.

### 1. Может ли множество являться своим элементом?

То есть, может ли хоть для какого-нибудь множества  $x$  быть верно утверждение  $x \in x$ ?

### 2. Парадокс Б. Рассела (1901). Рассмотрим множество $Y = \{x \mid x \notin x\}$ (т. е. $Y$ состоит из всех множеств, которые не являются собственными элементами).

- Вопрос: верно ли, что  $Y \in Y$ ?
- При любом ответе на этот вопрос возникает противоречие!

- В формальной теории множеств соотношение  $x \in x$  запрещено (аксиома регулярности).
- Класс  $Y$ , определенный в парадоксе Рассела, множеством не является.
- Также не является множеством класс всех множеств.

## Операции над множествами

- Основные операции. Пусть  $A, B$  — множества.

- ▶  $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$  — *пересечение*;

- ▶  $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid (x \in A \vee x \in B)\}$  — *объединение*;  
– *это всегда множество!*

- ▶  $A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$  — *разность*;

- ▶  $A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  — *симметрическая разность*.

- Дополнение множества. Пусть  $U$  — *универсум* (или *объемлющее множество*), т. е. множество, которое содержит все рассматриваемые множества. Тогда

- ▶  $\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in U \mid x \notin A\}$   
– *результат этой операции зависит от выбора  $U$ !*

- Упорядоченные пары.

- ▶  $(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{x\}, \{x, y\}\}$  — *упорядоченная пара*  
элементов (множеств)  $x$  и  $y$ .

- Очевидно, что  $(a, b) = (c, d)$  тогда и только тогда, когда  $a = c$  и  $b = d$ .

## Декартово произведение множеств

- ▶  $A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid (x \in A \ \& \ y \in B)\}$  — *декартово произведение* (или *прямое произведение*) множеств  $A$  и  $B$ .
- Аналогично понятию упорядоченной пары можно ввести понятия *упорядоченной тройки*, *упорядоченной четверки*, ..., *упорядоченной  $n$ -ки*.
  - ▶ Это можно сделать по индукции:  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} ((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$ .
- Понятие декартова произведения также можно обобщить на случай  $n$  множеств.
  - ▶  $A_1 \times \dots \times A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1 \in A_1 \ \& \ \dots \ \& \ x_n \in A_n)\}$ .
  - ▶ Если  $A$  — множество и  $n \in \mathbb{N}$ , то
$$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \times \dots \times A}_n$$
    - Здесь мы формально считаем, что  $A^1 = A$ .

## Определение

- **Бинарным отношением** между множествами  $X$  и  $Y$  называется произвольное подмножество их декартова произведения  $R \subset X \times Y$ .
- Если  $X = Y$ , то  $R$  — бинарное отношение на  $X$ .
- Пара  $(x, y)$ , где  $x \in X$  и  $y \in Y$ , **удовлетворяет** отношению  $R$ , если  $(x, y) \in R$ . Обозначение:  $xRy$ .

## Замечание

- Фактически, бинарное отношение — это свойство, которое для каждой пары  $(x, y)$  может либо выполняться, либо не выполняться ( **$R$  — это множество тех пар, для которых данное свойство выполнено**).
- Бинарное отношение  $R$  на множестве  $X$  можно рассматривать как орграф: элементы множества будут его вершинами, а стрелка из  $x$  в  $y$  проводится тогда и только тогда, когда выполнено  $xRy$ .

## Бинарные и $n$ -арные отношения

Аналогично можно ввести понятие отношения между  $n$  множествами, где  $n \in \mathbb{N}$ .

### Определение

- **$n$ -местным** (или  **$n$ -арным**) отношением между множествами  $X_1, \dots, X_n$  называется произвольное подмножество  $R \subset X_1 \times \dots \times X_n$ .
- Если  $X_1 = \dots = X_n = X$ , то  $R$  —  **$n$ -местное отношение** на множестве  $X$ .

### Примеры

1. **Равенство** ( $a = b$ ) — бинарное отношение на  $\mathbb{R}$ ;
2. **делимость** ( $a \vdots b$ ) — бинарное отношение на  $\mathbb{Z}$ ;
3. пусть  $G = (V, E)$  — граф, тогда
  - **смежность** — бинарное отношение на  $V$ ,
  - **инцидентность** — бинарное отношение между  $V$  и  $E$ ;
4. **точки  $A, B, C$  лежат на одной прямой** — трехместное отношение на плоскости.

## Определение

Бинарное отношение  $R \subset X^2$  называется

- *рефлексивным*, если  $xRx$  выполнено для всех  $x \in X$ ;
- *иррефлексивным* (*антирефлексивным*), если  $xRx$  не выполнено ни для каких  $x \in X$ ;
- *симметричным*, если из  $xRy$  следует  $yRx$ ;
- *антисимметричным*, если из  $xRy$  и  $yRx$  следует,  $x = y$ ;
- *транзитивным*, если из  $xRy$  и  $yRz$  следует  $xRz$ .

## Определение

Бинарное отношение  $\sim$  на множестве  $X$  называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

### Теорема

Пусть  $\sim$  — отношение эквивалентности на множестве  $X$ . Тогда  $X$  можно так разбить на подмножества, что любые два элемента из одного подмножества эквивалентны, а любые два элемента из разных подмножеств — нет.

Доказательство. Пусть  $x \in X$ .

- Определим **класс** элемента  $x$  следующим образом:  $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid y \sim x\}$ .
- Отметим следующие свойства.
  1.  $x \in \bar{x}$ ;
  2. если  $y, z \in \bar{x}$ , то  $y \sim z$ ;
  3. если  $y \in \bar{x}$  и  $z \notin \bar{x}$ , то  $y \not\sim z$ .
- Из этого следует, что классы любых двух элементов либо совпадают, либо не пересекаются. Таким образом,  $X$  можно разбить на непересекающиеся классы. □

### Определение

Построенные выше подмножества называются **классами эквивалентности**.

## Определение

- Бинарное отношение  $\prec$  на множестве  $X$  называется *отношением частичного порядка*, если оно антисимметрично и транзитивно.
- Если при этом отношение  $\prec$  иррефлексивно, то оно называется *отношением строгого частичного порядка*.
- А если оно рефлексивно — то *отношением нестрогого частичного порядка*.
  - ▶ Как правило, для отношения строгого частичного порядка используется знак  $\prec$  или  $\succ$ , а для нестрогого — знак  $\preceq$  или  $\succeq$ .
- Множество, на котором задано отношение частичного порядка, называется *частично упорядоченным*.
  - ▶ Формально, частично упорядоченное множество — это упорядоченная пара  $(X, \prec)$ , где  $X$  — множество и  $\prec$  — отношение частичного порядка на  $X$ .
  - ▶ В частично упорядоченном множестве некоторые пары элементов могут быть *несравнимы*. То есть могут существовать такие  $a, b \in X$ , что ни одно из утверждений  $a = b$ ,  $a \prec b$ ,  $b \prec a$  не выполнено.

## Определение

- Бинарное отношение  $\prec$  на множестве  $X$  называется *отношением (строгого) линейного порядка*, если оно является отношением частичного порядка и для любых  $a, b \in X$  выполнено ровно одно из следующих трех утверждений:  $a = b$ ,  $a \prec b$  или  $b \prec a$ .
- В этом случае, пара  $(X, \prec)$  называется *линейно упорядоченным множеством*.

## Примеры

1.  $a < b$  — отношение линейного порядка на  $\mathbb{R}$ ;
2.  $a \vdots b$  — отношение частичного порядка на  $\mathbb{N}$ .
3. Пусть  $X$  — множество.  
Тогда  $A \subset B$  — отношение частичного порядка на  $\mathcal{P}(X)$ .

## Отображения и функции

- Неформально, *отображение* (*функция*) из множества  $X$  в множество  $Y$  — это такое правило  $f$ , которое каждому элементу  $x \in X$  ставит в соответствие ровно один элемент  $y \in Y$ . Этот элемент обозначается  $f(x)$ .
- Формально понятие отображения можно определить в терминах отношений.

### Определение

- Бинарное отношение  $f \subset X \times Y$  называется *отображением* из множества  $X$  в множество  $Y$ , если любой элемент  $x \in X$  входит в качестве первого элемента ровно в одну пару  $(x, y) \in f$ .
- Обозначение:  $f: X \rightarrow Y$ .
- Вторым элементом пары  $(x, y)$  обозначают  $f(x)$  и называют *образом* элемента  $x$  при отображении  $f$ .
- Если  $y = f(x)$ , то  $x$  называют *прообразом* элемента  $y$ .
- В отличие от образа, прообраз элемента существует не всегда; также прообраз может быть не единственным.

## Определение

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется

- **инъекцией**, если  $f(x) \neq f(y)$  при  $x \neq y$ ;
- **сюръекцией**, если у каждого элемента множества  $Y$  есть хотя бы один прообраз в множестве  $X$ ;
- **биекцией**, если  $f$  одновременно является инъекцией и сюръекцией.

## Замечание

- Биекция — это **взаимно однозначное соответствие** между множествами  $X$  и  $Y$ : каждому элементу множества  $X$  поставлен в соответствие единственный элемент множества  $Y$ , а каждому элементу множества  $Y$  — единственный элемент множества  $X$ .
- В частности, если  $X$  и  $Y$  — конечные множества и существует биекция  $f: X \rightarrow Y$ , то в множествах  $X$  и  $Y$  одинаковое число элементов.

## Определение

*Композицией* отображений  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow Z$  называется отображение  $g \circ f: X \rightarrow Z$ , задаваемое формулой  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

## Определение

- Отображение  $g: Y \rightarrow X$  называется *обратным* к отображению  $f: X \rightarrow Y$ , если обе композиции  $f \circ g$  и  $g \circ f$  являются тождественными отображениями.
- Т. е.  $g(f(x)) = x$ , при всех  $x \in X$ , и  $f(g(y)) = y$ , при всех  $y \in Y$ .
- Отображение  $f$  называется *обратимым*, если к нему есть обратное.
- Отображение, обратное к  $f$ , обычно обозначается  $f^{-1}$ .

## Теорема

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  обратимо  $\iff f$  — биекция.

## Доказательство.

“ $\Leftarrow$ ”: Для каждого  $y \in Y$  обозначим через  $f^{-1}(y)$  единственный прообраз элемента  $y$ .

- Тогда  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  — отображение, обратное к  $f$ .

“ $\Rightarrow$ ”: Пусть  $f^{-1}$  — отображение, обратное к  $f$ .

- $f$  — **инъекция**, поскольку если  $f(x) = f(y)$ , то  $x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) = y$ .

- $f$  — **сюръекция**, поскольку для любого  $y \in Y$  имеем  $y = f(f^{-1}(y))$ . □

## Конечные множества: немного комбинаторики

- Пусть  $X$  — конечное множество. Количество его элементов будем обозначать через  $|X|$ .
- Мы уже знаем, что  $|X| = |Y|$  тогда и только тогда, когда между  $X$  и  $Y$  можно установить биекцию.

### Лемма (принцип произведения)

Если  $|X| = m$  и  $|Y| = n$ , то  $|X \times Y| = mn$ .

Доказательство. Каждый из  $m$  элементов множества  $X$  входит ровно в  $n$  пар с элементами множества  $Y$ . □

### Следствие

Если  $|X_i| = m_i$ , где  $i \in [1..k]$ , то  $|X_1 \times \dots \times X_k| = m_1 \cdot \dots \cdot m_k$ .

Доказательство. Индукция по  $k$ .

База ( $k = 2$ ): см. предыдущую лемму.

Переход ( $k \rightarrow k + 1$ ):  $|X_1 \times \dots \times X_k \times X_{k+1}| = |(X_1 \times \dots \times X_k) \times X_{k+1}| =$   
 $= |X_1 \times \dots \times X_k| \cdot |X_{k+1}| = (m_1 \cdot \dots \cdot m_k) \cdot m_{k+1} = m_1 \cdot \dots \cdot m_k \cdot m_{k+1}.$  □

## Конечные множества: количество подмножеств

### Теорема

Если  $|X| = m$ , то  $|\mathcal{P}(X)| = 2^m$ .

Доказательство. Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ .

- Для каждого из  $i \in [1..m]$  есть два варианта:  $x_i$  можно либо включить в подмножество, либо не включать.
- Итого, есть  $2^m$  способов выбрать подмножество. □

### Замечание

- Фактически, мы построили следующую биекцию между множествами  $\mathcal{P}(X)$  и  $\{0, 1\}^m$ .

- ▶ Подмножеству  $A \subset X$  ставится в соответствие последовательность  $(a_1, \dots, a_m) \in \{0, 1\}^m$ , где

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in A \\ 0, & \text{если } x_i \notin A. \end{cases}$$

### Теорема

Пусть  $|X| = k$  и  $|Y| = n$ . Тогда

1. число отображений из  $X$  в  $Y$  равно  $n^k$ ;
2. число инъекций из  $X$  в  $Y$  равно  $n(n-1)\dots(n-k+1)$ .

Доказательство. Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ .

1. Для каждого элемента  $x_i \in X$  можно  $n$  способами выбрать его образ.
2. Образ  $x_1$  можно выбрать  $n$  способами. После этого останется  $n-1$  способ выбрать образ  $x_2$ ,  $\dots$ ,  $n-k+1$  способ выбрать образ  $x_k$ . □

### Замечание

При  $n \geq k$  имеем  $n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ ,  
где  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  (и  $0! = 1$ ).

Вопрос. А чему равно число сюръекций из  $X$  в  $Y$ ?

Об этом мы поговорим позже...

## Конечные множества: перестановки и размещения

### Определение

*Перестановкой* на множестве  $X$  называется произвольная биекция  $\sigma: X \rightarrow X$ .

### Следствие

Если  $|X| = n$ , то число перестановок на множестве  $X$  равно  $n!$ .

### Определение

1. Число инъекций  $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$  называется *числом размещений из  $n$  элементов по  $k$*  и обозначается  $A_n^k$ .
2. Число отображений  $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$  называется *числом размещений с повторениями из  $n$  элементов по  $k$*  и обозначается  $\tilde{A}_n^k$ .

Итого, мы доказали следующие формулы.

1.  $A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ , при  $n \geq k$ ;
2.  $\tilde{A}_n^k = n^k$ .

# Счётные множества

## Определение

Множество  $X$  называется **счётным**, если существует биекция  $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ .

## Замечание

- Это означает, что элементы множества  $X$  можно **занумеровать натуральными числами**: для элемента  $a \in X$  число  $f(a)$  будет его номером.
- Элементы счётного множества можно записать в виде последовательности:  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ , где  $x_k = f^{-1}(k)$ .

## Примеры

- $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$  — множество всех чётных чисел.

Доказательство.  $f(x) = x/2$  — биекция из  $2\mathbb{N}$  в  $\mathbb{N}$ . □

- $\mathbb{Z}$  — множество всех целых чисел.

Доказательство.

$f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ 1 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$  — биекция из  $\mathbb{Z}$  в  $\mathbb{N}$ . □

## Счётность произведения

### Теорема

Множество  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  — счётно.

Доказательство.

Функция  $f(x, y) = \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} + y$  — биекция из  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  в  $\mathbb{N}$ . □

### Замечание

- Эта функция перечисляет клетки бесконечной таблицы “по диагоналям”.
- Другой пример биекции из  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  в  $\mathbb{N}$ :  $g(x, y) = 2^{x-1}(2y - 1)$ .

### Следствие

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — счётные множества.

Тогда множество  $X_1 \times \dots \times X_n$  — также счётно.

Доказательство. Рассмотрим биекции  $f_i: X_i \rightarrow \mathbb{N}$  (где  $i \in [1..n]$ ) и  $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

База ( $n = 2$ ): отображение  $h_2: X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{N}$ , задаваемое формулой

$$h_2(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} g(f_1(x_1), f_2(x_2)),$$

является биекцией.

## Счётные множества: примеры и свойства

### Переход $(n - 1 \rightarrow n)$ :

- Множество  $X_1 \times \dots \times X_{n-1}$  счётно по индукционному предположению.
- Множество  $X_n$  счётно по условию.
- Тогда множество  $X_1 \times \dots \times X_{n-1} \times X_n = (X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$  является декартовым произведением двух счётных множеств.
- По доказанному в базе, оно счётно. □

### Теорема

*Бесконечное подмножество счётного множества — счётно.*

### Доказательство.

Пусть  $X$  — счётное множество и  $A \subset X$  — его бесконечное подмножество.

- Рассмотрим биекцию  $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ .
- Тогда  $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} |\{a \in A \mid f(a) \leq f(x)\}|$  — биекция из  $A$  в  $\mathbb{N}$ . □

## Не более чем счётные множества

### Определение

- Множество  $X$  — *не более чем счётно*, если  $X$  либо конечно, либо счётно.
- Множество  $X$  — *несчётно*, если  $X$  не является ни конечным, ни счётным.

### Теорема

Пусть  $X \neq \emptyset$ . Тогда следующие условия равносильны:

1. множество  $X$  не более чем счётно;
2. существует инъекция  $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ ;
3. существует сюръекция  $g: \mathbb{N} \rightarrow X$ .

### Доказательство.

“1.  $\Rightarrow$  3.”: Пусть множество  $X$  не более чем счётно.

- Если  $X$  бесконечно, то оно счётно.
  - Тогда существует биекция  $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ .
  - Следовательно,  $f^{-1}: \mathbb{N} \rightarrow X$  — сюръекция.

## Не более чем счётные множества

- Если  $X$  конечно, то обозначим  $|X| = n$ .
  - ▶ Тогда существует биекция  $f: X \rightarrow [1..n]$ .
  - ▶ Пусть  $g(y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f^{-1}(y), & y \leq n \\ f^{-1}(n), & y > n. \end{cases}$
  - ▶ Легко видеть, что  $g: \mathbb{N} \rightarrow X$  — сюръекция.

“3.  $\Rightarrow$  2.”: Пусть  $g: \mathbb{N} \rightarrow X$  — сюръекция.

- Тогда у каждого элемента  $x \in X$  есть хотя бы один прообраз.
- Выберем из всех прообразов  $x$  наименьший.
- То есть положим  $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{y \in \mathbb{N} \mid g(y) = x\}$ .
- Легко видеть, что  $f: X \rightarrow \mathbb{N}$  — инъекция.

“2.  $\Rightarrow$  1.”: Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{N}$  — инъекция.

- Рассмотрим множество  $f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \mid x \in X\}$ .
- Тогда  $f: X \rightarrow f(X)$  — биекция.
- Поскольку  $f(X) \subset \mathbb{N}$ , множество  $f(X)$  не более чем счётно.
- Если  $f(X)$  — конечно, то и  $X$  — конечно.
- Если  $f(X)$  — счётно, то и  $X$  — счётно.



# Не более, чем счётные множества

## Следствие 1

Если  $f: X \rightarrow Y$  — инъекция и множество  $Y$  — счётно, то множество  $X$  — не более чем счётно.

Доказательство.

- Пусть  $g: Y \rightarrow \mathbb{N}$  — биекция.
- Тогда  $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{N}$  — инъекция.



## Следствие 2

Если  $g: Y \rightarrow X$  — сюръекция и множество  $Y$  — счётно, то множество  $X$  — не более чем счётно.

Доказательство.

- Пусть  $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$  — биекция.
- Тогда  $g \circ f: \mathbb{N} \rightarrow X$  — сюръекция.



## Счётность множества рациональных чисел

### Теорема

*Множество  $\mathbb{Q}$  всех рациональных чисел — счётно.*

*Доказательство.* Рассмотрим отображение  $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ , задаваемое формулой  $g(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a}{b}$ .

- Очевидно, что  $g$  — сюръекция.
- Следовательно,  $\mathbb{Q}$  — не более, чем счётно.
- Но при этом множество  $\mathbb{Q}$  — бесконечно.
- Таким образом,  $\mathbb{Q}$  — счётно. □

### Теорема

*Объединение не более, чем счётного множества не более, чем счётных множеств — не более чем счётно.*

### Замечание

То есть, если нам дана конечная или бесконечная последовательность множеств  $A_1, A_2, \dots$ , каждое из которых не более чем счётно, то множество  $B = \bigcup_i A_i$  также не более чем счётно.

## Объединение не более чем счётных множеств

Доказательство. Пусть  $f_i: A_i \rightarrow \mathbb{N}$  — инъекции.

- Для каждого  $x \in B$  пусть  $s(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{n \in \mathbb{N} \mid x \in A_n\}$ .
- Рассмотрим отображение  $h: B \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , задаваемое формулой  $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} (s(x), f_{s(x)}(x))$ .
- Очевидно, что  $h$  — инъекция.
- Следовательно,  $B$  — не более, чем счётно. □

### Замечание

В частности, объединение любого конечного или счётного набора счётных множеств всегда счётно.

### Определение

- Вещественное число  $\alpha$  называется *алгебраическим*, если  $\alpha$  — корень ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами.
- В противном случае, число  $\alpha$  называется *трансцендентным*.

### Теорема

*Множество всех алгебраических чисел счётно. (Задача.)*

## Пример несчётного множества

### Теорема

Множество  $[0, 1)$  несчётно.

Доказательство. Пусть  $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1)$  — биекция.

- Тогда  $[0, 1) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ , где  $\alpha_i \stackrel{\text{def}}{=} f(i)$ .
- Запишем все  $\alpha_i$  в виде бесконечных десятичных дробей:  $\alpha_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{ij}}{10^j}$ ,

где  $a_{ij} \in [0..9]$ .

- Рассмотрим число  $\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{10^i}$ , где  $b_i = \begin{cases} 4, & a_{ii} = 7 \\ 7, & a_{ii} \neq 7 \end{cases}$ .
- Тогда  $\beta \in [0, 1)$ , но при этом  $\beta$  не совпадает ни с одним из  $\alpha_i$  (десятичные записи чисел  $\beta$  и  $\alpha_i$  отличаются в  $i$ -м разряде). Противоречие.  $\square$

### Следствие

Существуют **трансцендентные** числа (т. е. вещественные числа, не являющиеся алгебраическими).

## Определение

Множества  $X$  и  $Y$  называются **равномощными** (или **эквивалентными**), если существует биекция  $f: X \rightarrow Y$ . Обозначение:  $X \sim Y$ .

## Замечание

- Легко видеть, что равномощность обладает всеми свойствами эквивалентности:

1.  $X \sim X$  (рефлексивность);
2. если  $X \sim Y$ , то  $Y \sim X$  (симметричность);
3. если  $X \sim Y$  и  $Y \sim Z$ , то  $X \sim Z$  (транзитивность).

- Тем самым, все множества можно разбить на классы равномощных.
- Каждому классу ставится в соответствие некоторая специальная характеристика, называемая **мощностью** множеств этого класса.

- Конечные множества равномощны если и только если они содержат поровну элементов.
  - ▶ **Мощностью** конечного множества называется число его элементов.
- Все счётные множества равномощны.
  - ▶ **Мощность** счётного множества обозначается через  $\aleph$ .
- Множество  $X$  имеет **мощность континуума**, если  $X \sim [0, 1]$ .
  - ▶ Мощность континуума обозначается через  $\mathfrak{c}$ .
- Есть разные варианты обозначений для мощности множества  $X$ :
  - ▶  $|X|$ ;  $\#X$ ;  $\overline{\overline{X}}$ ;  $\text{card}(X)$ .
  - ▶  $\overline{\overline{X}}$  — “двойное отвлечение” (от свойств элементов и от их порядка).
- Мы будем использовать обозначение  $|X|$ .

# Счётное подмножество бесконечного множества

## Теорема

*В любом бесконечном множестве есть счётное подмножество.*

**Доказательство.** Пусть  $X = X_0$  — бесконечное множество.

- Будем последовательно выбирать из  $X_0$  элементы счётного подмножества  $A$ .
- Пусть  $a_1 \in X_0$  и  $X_1 \stackrel{\text{def}}{=} X_0 \setminus \{a_1\}$ .
  - ▶ Множество  $X_1$  бесконечно, т. к. иначе  $X = X_1 \cup \{a_1\}$  было бы конечно.
- На  $k$ -м шаге из бесконечного множества  $X_{k-1} \subset X$  выбираем элемент  $a_k$  и полагаем  $X_k \stackrel{\text{def}}{=} X_{k-1} \setminus \{a_k\}$ .
  - ▶ Аналогично предыдущему, множество  $X_k$  бесконечно.
- Продолжая этот процесс, получим последовательность  $(a_i)$  элементов множества  $X$ .
- Тогда, множество  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ , составленное из членов построенной последовательности, будет счётным подмножеством  $X$ . □

- В предыдущей теореме мы строили бесконечную последовательность непустых множеств и из каждого из них выбирали по элементу.
- На самом деле, нам нужно *одновременно* сделать такой выбор для всех рассматриваемых множеств.
- То, что можно одновременно выбрать по элементу из бесконечного набора непустых множеств *не является очевидным*.
- Формально, это свойство называется **аксиомой выбора**.
- **Аксиома выбора**. Пусть  $S$  — множество непустых множеств,  $\cup S$  — объединение всех входящих в  $S$  множеств. Тогда существует функция  $f: S \rightarrow \cup S$ , такая, что  $f(x) \in x$  для каждого  $x \in S$ .
- Фактически, мы уже использовали аксиому выбора в теореме о счётном объединении счётных множеств.
- Эти две теоремы (равно как и многие другие) невозможно доказать без аксиомы выбора.

## Следствия теоремы о счётном подмножестве

### Следствие 1

Если  $X$  бесконечно и  $Y$  не более чем счётно, то  $X \cup Y \sim X$ .

Доказательство. Пусть  $B \subset X$  — счётное множество;

- $A = X \setminus B$  и  $C = Y \setminus X$ .
- Тогда  $X = A \cup B$  и  $X \cup Y = A \cup B \cup C$ ;
- при этом  $A \cap B = A \cap C = \emptyset$ ,
- множество  $C$  не более чем счётно и  $B \cup C$  счётно.
- Рассмотрим биекцию  $f: B \rightarrow B \cup C$ .
- Тогда отображение  $g: X \rightarrow X \cup Y$ , задаваемое формулой

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x), & x \in B \\ x, & x \in A \end{cases} \quad \text{— биекция.}$$

□

### Следствие 2

Если  $X$  несчётно и  $Y$  не более чем счётно, то  $X \setminus Y \sim X$ .

Доказательство. Заметим, что  $X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y)$ ;

- множество  $X \setminus Y$  бесконечно и  $X \cap Y$  — не более чем счётно.

□

## О мощности континуума

### Утверждение

Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $a < b$ . Тогда множества  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  и  $(a, b)$  имеют мощность континуума.

### Доказательство.

- Функция  $f(x) = (b - a)x + a$  задает биекцию  $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ .
- Множества  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  и  $(a, b)$  равномощны  $[a, b]$ , поскольку получаются удалением конечного числа элементов. □

### Утверждение

Множество  $\mathbb{R}$  имеет мощность континуума.

### Доказательство.

Функция  $\operatorname{tg} x$  задает биекцию из  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  на  $\mathbb{R}$ . □

## Определение

Мощность множества  $X$  *больше* мощности множества  $Y$ , если эти множества неравномощны и в  $X$  есть подмножество, равномощное  $Y$ .

Обозначение:  $|X| > |Y|$ .

## Теорема (Г. Кантор, Ф. Бернштейн)

Если существуют подмножества  $X_0 \subset X$  и  $Y_0 \subset Y$ , такие, что  $X_0 \sim Y$  и  $Y_0 \sim X$ , то  $X \sim Y$ . (б/д)

- Тем самым, утверждения  $|X| > |Y|$  и  $|Y| > |X|$  не могут быть выполнены одновременно. То есть сравнение мощностей корректно.
- При помощи аксиомы выбора можно доказать, что любые две мощности сравнимы. То есть для любых  $X$  и  $Y$  выполнено ровно одно из следующих трех утверждений: либо  $|X| > |Y|$ , либо  $|Y| > |X|$ , либо  $X \sim Y$ .

- Мощность конечного множества тем больше, чем больше в нем элементов.
- Мощность счётного множества больше мощности любого конечного множества.
- Обратно, если  $|X| < \aleph$ , то  $X$  конечно.
- Мощность континуума больше мощности счетного множества.
- **Континуум-гипотеза.** *Не существует такого множества  $X$ , что  $\aleph < |X| < \mathfrak{c}$ .*
- К. Гёдель и П. Коэн доказали, что континуум-гипотезу невозможно ни доказать ни опровергнуть в рамках формальной теории множеств.

## Мощность множества всех подмножеств

### Теорема (Г. Кантор)

Для любого множества  $X$  выполнено  $|\mathcal{P}(X)| > |X|$ .

Доказательство. Пусть  $Y = \{\{x\} \mid x \in X\}$ .

- Очевидно, что  $Y \sim X$  и  $Y \subset \mathcal{P}(X)$ .
- Пусть  $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  — биекция.
- Рассмотрим множество  $Z \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ .
- Пусть  $z \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(Z)$ . Верно ли, что  $z \in Z$ ?
  - ▶ Если  $z \in Z$ , то  $z \in f(z)$ , откуда  $z \notin Z$ ;
  - ▶ если  $z \notin Z$ , то  $z \notin f(z)$ , откуда  $z \in Z$ .
- В любом случае получаем противоречие. □

### Замечание

- Из этой теоремы следует, что не существует множества наибольшей мощности. Следовательно, нет и множества всех множеств.
- Для конечных множеств это означает, что  $2^n$  всегда больше  $n$ .