Вопросы, 2 семестр

V. Рекуррентные соотношения в комбинаторике

46. Числа Стирлинга второго рода. Определение и значения для частных случаев.

47. Рекуррентная формула для чисел Стирлинга второго рода.

48. Связь чисел Стирлинга второго рода и числа сюръекций. Явная формула для чисел Стирлинга второго рода.

49. Числа Стирлинга второго рода и многочлены.

50. Числа Стирлинга первого рода. Определение и рекуррентная формула.

51. Числа Стирлинга первого рода и многочлены.

52. Связь чисел Стирлинга первого и второго рода.

VI. Цепи и антицепи

53. Цепи и антицепи в конечном частично упорядоченном множестве. Представление частично упорядоченного множества в виде орграфа. Цепи и антицепи с точки зрения графов. Теорема Мирского.

54. Теорема Дилуорса. Доказательство при помощи теоремы Кёнига.

55. Вывод теоремы Кёнига из теоремы Дилуорса.

56. Теорема Эрдёша-Секереша о монотонных подпоследовательностях.

57. Разбиение множества всех подмножеств конечного множества на симметричные цепи. Теорема Шпернера о максимальной антицепи в множестве всех подмножеств.

58. Неравенство Любелла-Ямамото-Мешалкина для антицепи в множестве всех подмножеств данного множества.

VII. Производящие функции

59. Производящие функции. Определение и простейшие примеры в случае, когда производящая функция — многочлен. Доказательство формулы суммы квадратов биномиальных коэффициентов при помощи производящих функций.

60. Степенной ряд как функция: формулировки основных теорем о сходимости степенных рядов.

61. Кольцо формальных степенных рядов. Определение и доказательство того, что это кольцо.

62. Обратимые элементы кольца формальных степенных рядов. Сумма геометрической прогрессии с точки зрения формальных степенных рядов.

63. Формула для $\frac{1}{(1-\lambda x)^n}$ в кольце формальных степенных рядов.

64. Производящая функция для чисел Фибоначчи. Вывод явной формулы для чисел Фибоначчи при помощи производящих функций.

65. Производящая функция последовательности, заданной линейным рекуррентным соотношением. Связь её знаменателя с характеристическим многочленом линейного рекуррентного соотношения.

66. Явная формула для последовательности, заданной линейным рекуррентным соотношением.

67. Производящая функция для чисел Каталана. Вывод явной формулы для чисел Каталана при помощи производящих функций.

68. Предел последовательности формальных степенных рядов. Определение и основные свойства.

69. Дискретное нормирование в кольце формальных степенных рядов и его связь с пределом последовательности.

70. Бесконечные суммы и бесконечные произведения формальных степенных рядов. Критерии их сходимости.

71. Композиция формальных степенных рядов. Формальное определение и условия при которых она корректно определена.

72. Производящая функция для числа разбиений. Доказательство утверждения о разбиениях на нечетные и на различные слагаемые при помощи производящих функций.

73. Формальная производная формальных степенных рядов. Определение и основные свойства. Связь с формальными степенными рядами от двух переменных.

74. Логарифмическая производная формального степенного ряда. Определение и основные свойства.

75. Логарифмирование и экспоненцирование формальных степенных рядов.

76. Понятие экспоненциальной производящей функции. Экспоненциальная производящая функция для последовательности $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ при $n \geq 2$.

77. Экспоненциальные производящие функции чисел Стирлинга и Белла.

78. Формальное возведение в степень. Определение и основные свойства.

79. Формальный степенной ряд для $(1+x)^\alpha$ (биномиальный ряд).

80. Многомерные производящие функции. Определение и два примера, связанных с биномиальными коэффициентами.

81. Разбиения целочисленных векторов. Двумерная производящая функция для числа этих разбиений. Необходимое и достаточное условие того, что это число не 0.

82. Разбиения целочисленных векторов. Замена переменных и лемма о независимости числа разбиений от одной из новых переменных.

83. Разбиения целочисленных векторов. Лемма о связи с разбиениями чисел.

84. Тождество Гаусса-Якоби. Вывод пентагональной формулы Эйлера из тождества Гаусса-Якоби.

85. Рекуррентная формула для числа разбиений (доказательство при помощи пентагональной формулы Эйлера).

VIII. Дискретная вероятность и вероятностные методы

86. Дискретное вероятностное пространство. Основные определения и примеры.

87. Условная вероятность. Определение, формула полной вероятности. Формула Байеса и теорема Байеса.

88. Независимые события. Определение, примеры и свойства.

89. Случайные величины. Определение и примеры. Распределение случайной величины. Независимые случайные величины.

90. Математическое ожидание. Определение и свойства. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин.

91. Дисперсия и её свойства. Дисперсия суммы независимых случайных величин.

92. Ковариация случайных величин и её свойства. Коэффициент корелляции.

93. Доказательство нижней оценки для $r(k,k)$ на языке теории вероятностей.

94. Теорема Эрдёша-Мозера о наименьшем ациклическом подтурнире.

95. Теорема Клейтмана-Спенсера об (n,k)-универсальных множествах.

96. Лемма об экспоненте. Следствие о (n,k)-универсальных множествах малого размера.

97. Факты о матожидании: оценки наибольшего и наименьшего значения случайной величины, неравенства Маркова и Чебышёва.

98. Теорема Селе о количестве гамильтоновых путей в турнире.

99. Теорема Алона о размере доминирующего множества.

100. Вероятностное доказательство теоремы Эрдёша о хроматическом числе и обхвате графа. Два утверждения о стремящихся к нулю вероятностях — без доказательства.

101. Доказательства утверждений о стремлении к нулю вероятности того, что в случайном графе будет много длинных циклов и будет большое независимое множество (из доказательства теоремы Эрдёша о хроматическом числе и обхвате графа).

IX. Перечисление непомеченных объектов

102. Помеченные графы и графы с точностью до изоморфизма. Группа автоморфизмов графа и её свойства.

103. Задача о числе раскрасок p точек на окружности с точностью до поворота в случае простого p. Вывод малой теоремы Ферма из решения этой задачи.

104. Лемма Бернсайда о подсчете числа орбит.

105. Задача о числе раскрасок n точек на окружности с точностью до поворота. Решение для общего случая.

106. Задача о числе раскрасок n точек на окружности с точностью до поворота и осевой симметрии. Решение для общего случая.

107. Асимптотика числа графов с точностью до изоморфизма. Эквивалентность $g_n \sim g_n^{(0)}$ — без доказательства.

108. Асимптотика числа графов с точностью до изоморфизма: доказательство того, что $g_n \sim g_n^{(0)}$.