Дискретная математика

Глава 4. Разбиения чисел

А. В. Пастор

12.11.2024

Упорядоченные и неупорядоченные разбиения

Определение

• *Разбиением* натурального числа n на m слагаемых называется представление n в виде $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{N}$.

• Разбиения называются *упорядоченными*, если порядок слагаемых имеет значение, и *неупорядоченными* в противном случае.

Пример

Есть три упорядоченных разбиения числа 4 на три слагаемых:

$$4 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2.$$

Но неупорядоченное разбиение только одно.

Замечание

• Строго говоря, упорядоченное разбиение — это последовательность натуральных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, сумма членов которой равна n.

• Неупорядоченное разбиение — это класс эквивалентности, где эквивалентными считаются последовательности, отличающиеся лишь порядком членов.

Упорядоченные разбиения

Теорема

1. *Количество упорядоченных разбиений числа n на m слагаемых равно C_{n-1}^{m-1}.*
2. *Количество упорядоченных разбиений числа n равно 2^{n-1}.*

Доказательство.

1. Нужно найти количество натуральных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$.
   - Выложим в ряд n шариков и расставим между ними $m-1$ перегородку.
   - Это можно сделать C_{n-1}^{m-1} способами.
   - Шарики разобьются на m групп: пусть в i-й группе x_i шариков.
   - Получаем биекцию между решениями и расстановками перегородок.
2. $\sum\limits_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1} = 2^{n-1}$. $\square$

Упорядоченные разбиения и числа Фибоначчи

Определение

Числа Фибоначчи — это последовательность F_n, задаваемая следующими условиями: $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ при $n > 1$.

Теорема

Количество упорядоченных разбиений числа n на нечетные слагаемые равно F_n.

Доказательство. Индукция по n.

База: при $n = 1$ и $n = 2$ утверждение очевидно.

Переход $(n-1, n \to n+1)$: Пусть $n + 1 = x_1 + \ldots + x_{m-1} + x_m$ — разбиение на нечетные слагаемые.

- Рассмотрим два случая: $x_m = 1$ и $x_m \geq 3$.
  1° $x_m = 1$. Тогда $n = x_1 + \ldots + x_{m-1}$. Таких разбиений F_n.
  2° $x_m \geq 3$. Тогда $n - 1 = x_1 + \ldots + x_{m-1} + (x_m - 2)$. Таких разбиений F_{n-1}.
- Итого, получаем $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ разбиений. □

Неупорядоченные разбиения и диаграммы Юнга

Определение

- $p_m(n)$ — количество неупорядоченных разбиений числа n на m слагаемых;
- $p(n)$ — количество неупорядоченных разбиений числа n.

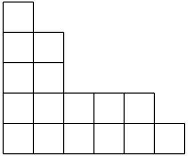
Стандартная форма записи

Слагаемые неупорядоченного разбиения обычно записывают в невозрастающем порядке:

$$n = x_1 + \ldots + x_m, \quad \text{где} \quad x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_m > 0.$$

Диаграммы Юнга

- Каждому разбиению числа n соответствует следующая диаграмма из n клеток.
- Столбцы диаграммы соответствуют слагаемым. Количество столбцов равно m.



$5+4+2+2+2+1 = 16$

Еще один способ записи разбиения

Теорема

1. *Количество решений уравнения* $t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \ldots + nt_n = n \qquad (1)$ *в целых неотрицательных числах равно* $p(n)$.
2. *Количество решений уравнения* (1), *удовлетворяющих условию* $t_1 + \ldots + t_n = m$, *равно* $p_m(n)$.

Доказательство. Пусть $n = x_1 + \ldots + x_m$ — разбиение числа n.

- Обозначим через t_k количество слагаемых в этом разбиении, равных k.
- Получим решение уравнения (1).
- Аналогично, каждому решению $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ уравнения (1) соответствует разбиение n, в котором ровно t_k слагаемых, равных k.
- При этом, количество слагаемых в разбиении будет равно $t_1 + \ldots + t_n$. $\square$

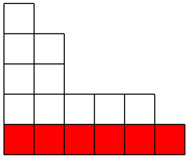
Рекуррентная формула для числа разбиений

Теорема

$p_m(n) = p_m(n-m) + p_{m-1}(n-m) + \ldots + p_1(n-m)$.

Доказательство.

- Рассмотрим диаграмму Юнга с n клетками и m столбцами.
- Удалим нижнюю строку.
- Получим диаграмму с $n-m$ клетками и $k \leq m$ столбцами.



$\square$

Следствие 1

Количество неупорядоченных разбиений числа $n-m$ на не более чем m слагаемых равно $p_m(n)$.

Рекуррентная формула для числа разбиений

Следствие 2

$p_m(n) = p_m(n-m) + p_{m-1}(n-1)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} p_m(n) &= p_m(n-m) + (p_{m-1}(n-m) + \ldots + p_1(n-m)) = \\ &= p_m(n-m) + p_{m-1}(n-1). \end{aligned}$$ $\square$

Замечание

- Отметим, что $p_1(n) = 1$ при всех n.
- При помощи доказанных выше рекуррентных соотношений, можно получить явные формулы для $p_m(n)$ при малых m.
- Мы сделаем это для $m = 2$ и $m = 3$.

Явные формулы для малых m

Определение

Пусть $x \in \mathbb{R}$.

- Через $[x]$ обозначается целая часть числа x, т. е, наибольшее целое число, не превосходящее x.
- Через $\{x\}$ обозначается дробная часть числа x, т. е, $\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} x - [x]$.

Теорема (де Морган)

1. $p_2(n) = \left[\frac{n}{2}\right]$;
2. $p_3(n) = \left[\frac{n^2+3}{12}\right]$.

Доказательство. Индукция по n.

1. База: при $n = 1$ и $n = 2$ утверждение очевидно.

   Переход $(n - 2 \to n)$:

   $p_2(n) = p_2(n-2) + p_1(n-1) = \left[\frac{n-2}{2}\right] + 1 = \left[\frac{n-2}{2} + 1\right] = \left[\frac{n}{2}\right]$.

Явные формулы для малых m

2. База: при $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$ утверждение очевидно.

   Переход ($n - 3 \to n$):

   $$\begin{aligned} p_3(n) = p_3(n-3) + p_2(n-1) &= \\ &= \left[\frac{(n-3)^2+3}{12}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] = \\ &= \left[\frac{(n^2-6n+12)+(6n-6)}{12}\right] = \\ &= \left[\frac{n^2+6}{12}\right] = \\ &= \left[\frac{n^2+3}{12}\right]. \end{aligned}$$

- Нужно проверить подсвеченные красным равенства.
- Для проверки первого из них, нам понадобится следующая лемма.

Лемма

$[x] + [y] = [x + y] \Leftrightarrow \{x\} + \{y\} < 1.$

Доказательство.

$x + y = ([x] + \{x\}) + ([y] + \{y\}) = ([x] + [y]) + (\{x\} + \{y\}).$ □

Явные формулы для малых m

Вернемся к доказательству теоремы.

- Здесь мы будем пользоваться тем, что точный квадрат может быть сравним только с 0 или 1 по модулям 3 и 4.

2.1. $\left[\frac{(n-3)^2+3}{12}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]=\left[\frac{(n^2-6n+12)+(6n-6)}{12}\right]$.

Нужно доказать, что $\left\{\frac{(n-3)^2+3}{12}\right\}+\left\{\frac{n-1}{2}\right\}<1$.

- При $n \not\vdots\, 2$: $\left\{\frac{n-1}{2}\right\}=0$ и $\left\{\frac{(n-3)^2+3}{12}\right\}<1$.
- При $n \,\vdots\, 2$: пусть $n=2k$, тогда $\left\{\frac{n-1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$ и $\left\{\frac{(n-3)^2+3}{12}\right\}=\left\{\frac{4k^2-12k+12}{12}\right\}=\left\{\frac{k^2}{3}\right\}\le\frac{1}{3}$.

2.2. $\left[\frac{n^2+6}{12}\right]=\left[\frac{n^2+3}{12}\right]$.

Нужно доказать, что числа $\frac{n^2+4}{12}$, $\frac{n^2+5}{12}$, $\frac{n^2+6}{12}$ не целые.

- Но $n^2+4 \not\vdots\, 3$, т. к. $n^2 \not\equiv 2 \pmod 3$;
- $n^2+5 \not\vdots\, 4$, т. к. $n^2 \not\equiv 3 \pmod 4$;
- $n^2+6 \not\vdots\, 4$, т. к. $n^2 \not\equiv 2 \pmod 4$.

$\square$

О явной формуле в общем случае

Теорема

- $p_m(n) = \frac{n^{m-1}}{(m-1)!m!} + c_{m-2}(m,n)n^{m-2} + \ldots + c_1(m,n)n + c_0(m,n)$, *где коэффициенты* $c_k(m,n)$ *зависят только от класса вычетов* n *по модулю* $m!$.
- *В частности, если* $n \equiv n_0 \pmod{m!}$ *при фиксированном* n_0, *то* $p_m(n)$ *является многочленом степени* $m-1$ *от переменной* n. *(б/д)*

Замечание

- Вспомним, что количество упорядоченных разбиений числа n на m слагаемых равно C_{n-1}^{m-1}.
- При фиксированном m это также многочлен от n со старшим членом $\frac{n^{m-1}}{(m-1)!}$.
- Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_m(n)}{C_{n-1}^{m-1}} = \frac{1}{m!}$.
- Это означает, что “почти все” разбиения n на m слагаемых состоят из различных слагаемых.

Разбиения на различные слагаемые

Теорема

Количество разбиений числа n на m различных слагаемых равно $p_m\left(n-\frac{m(m-1)}{2}\right)$.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Рассмотрим числа $y_i = x_i - m + i$.
  - $y_i - y_{i+1} = (x_i - m + i) - (x_{i+1} - m + i + 1) = x_i - x_{i+1} - 1 \geq 0$;
  - следовательно, $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_m = x_m > 0$;
  - $y_1 + y_2 + \ldots + y_m =$
    $= x_1 + x_2 + \ldots + x_m - ((m-1) + (m-2) + \ldots + 1) = n - \frac{m(m-1)}{2}$.
- Итак, каждому разбиению n на m различных слагаемых поставили в соответствие разбиение $n - \frac{m(m-1)}{2}$ на m слагаемых.
- Очевидно, что это биекция. $\square$

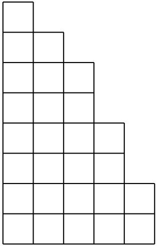
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.



- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. $\square$

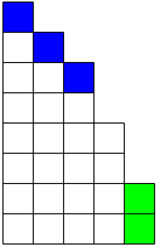
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.



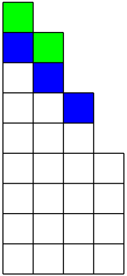
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □

Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.



- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. $\square$

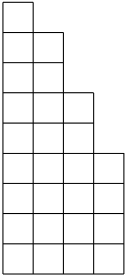
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □



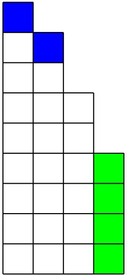
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. $\square$



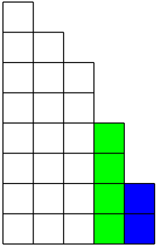
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.



- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. $\square$

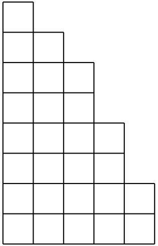
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. $\square$



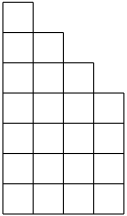
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.



- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. $\square$

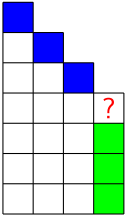
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \overset{\mathrm{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \overset{\mathrm{def}}{=} x_m$.
  - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.



- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. $\square$

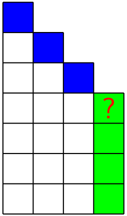
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.



- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. $\square$

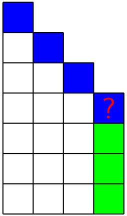
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_m$.
  - ▶ Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - ▶ Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.



- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - ▶ При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - ▶ При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □

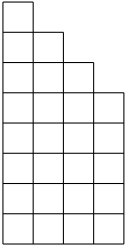
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.



- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. $\square$

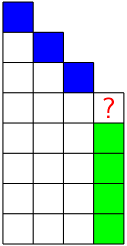
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.



- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. $\square$

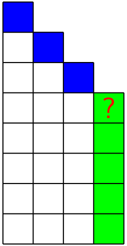
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.



- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □

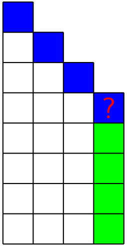
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.



- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. □

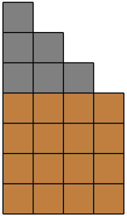
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.



- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. $\square$

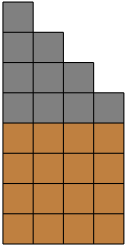
Пентагональная формула Эйлера

Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число n не представимо в виде $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$, где $k \in \mathbb{N}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 > x_2 > \ldots > x_m > 0$.
- Введем обозначения: $k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$ и $\ell \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_m$.
  - Если $k \geq \ell$, убираем x_m и увеличиваем $x_1, \ldots, x_\ell$ на 1.
  - Если $k < \ell$, уменьшаем $x_1, \ldots, x_k$ на 1 добавляем $x_{m+1} = k$.
- Проблема: $k = m = \ell$ или $k = m = \ell - 1$. В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При $k = m = \ell$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$.
  - При $k = m = \ell - 1$ получаем $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$.



- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма. $\square$

О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется пентагональная формула Эйлера?

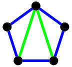
- Дело в том, что числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$ — это так называемые *пятиугольные числа*.
- Формально, k-е пятиугольное число — это сумма первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:
$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2)$.
- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.
- Числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$ получаются похожим образом:
$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1)$, но для них нет столь красивого геометрического представления.
- Аналогично, n-угольные числа — это суммы первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $n - 2$.
- Наиболее известны треугольные числа:
$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + k$.

$$\frac{1}{2}(3 \cdot 1^2 - 1) = 1.$$

О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется пентагональная формула Эйлера?

- Дело в том, что числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$ — это так называемые *пятиугольные числа*.
- Формально, k-е пятиугольное число — это сумма первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:
$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2)$.
- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.
- Числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$ получаются похожим образом:
$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1)$, но для них нет столь красивого геометрического представления.
- Аналогично, n-угольные числа — это суммы первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $n - 2$.
- Наиболее известны треугольные числа:
$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + k$.

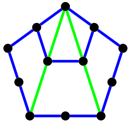


$\frac{1}{2}(3 \cdot 2^2 - 1) = 1 + 4$.

О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется пентагональная формула Эйлера?

- Дело в том, что числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$ — это так называемые *пятиугольные числа*.
- Формально, k-е пятиугольное число — это сумма первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:
$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2)$.
- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.
- Числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$ получаются похожим образом:
$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1)$, но для них нет столь красивого геометрического представления.
- Аналогично, n-угольные числа — это суммы первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $n - 2$.
- Наиболее известны треугольные числа:
$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + k$.

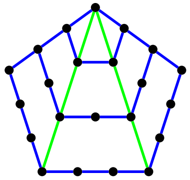


$\frac{1}{2}(3 \cdot 3^2 - 1) = 1 + 4 + 7$.

О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется пентагональная формула Эйлера?

- Дело в том, что числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$ — это так называемые *пятиугольные числа*.
- Формально, k-е пятиугольное число — это сумма первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:
$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2)$.
- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.
- Числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$ получаются похожим образом:
$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1)$, но для них нет столь красивого геометрического представления.
- Аналогично, n-угольные числа — это суммы первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $n - 2$.
- Наиболее известны треугольные числа:
$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + k$.

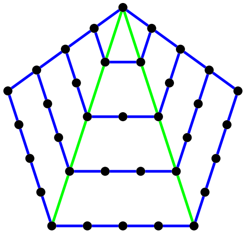


$$\frac{1}{2}(3 \cdot 4^2 - 1) = \\ = 1 + 4 + 7 + 10.$$

О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется пентагональная формула Эйлера?

- Дело в том, что числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$ — это так называемые *пятиугольные числа*.
- Формально, k-е пятиугольное число — это сумма первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:
$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2)$.
- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.
- Числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$ получаются похожим образом:
$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1)$, но для них нет столь красивого геометрического представления.
- Аналогично, n-угольные числа — это суммы первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $n - 2$.
- Наиболее известны треугольные числа:
$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + k$.

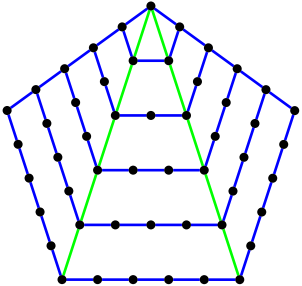


$$\frac{1}{2}(3 \cdot 5^2 - 1) = \\ = 1 + 4 + 7 + 10 + 13.$$

О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется пентагональная формула Эйлера?

- Дело в том, что числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$ — это так называемые *пятиугольные числа*.
- Формально, k-е пятиугольное число — это сумма первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:
$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2)$.
- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.
- Числа вида $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$ получаются похожим образом:
$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \ldots + (3k - 1)$, но для них нет столь красивого геометрического представления.
- Аналогично, n-угольные числа — это суммы первых k членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью $n - 2$.
- Наиболее известны треугольные числа:
$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + k$.



$$\frac{1}{2}(3 \cdot 6^2 - 1) = \\ = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16.$$

Асимптотические оценки числа $p(n)$

Теорема (формула Харди–Раманужана)

$p(n) \sim \dfrac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{n}}$ *(б/д)*.

Замечание

Есть и формулы, дающие более точное приближение числа $p(n)$, чем теорема Харди-Раманужана. Например, те же авторы доказали также следующую формулу:

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn}\left(\frac{e^{C\lambda_n}}{\lambda_n}\right) + O(e^{D\sqrt{n}}),$$

где $C = \pi\sqrt{2/3}$, $\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$ и D — любое число, большее $\frac{1}{2}C$ (б/д).