

Дискретная математика

Глава 3. Элементарная комбинаторика

А. В. Пастор

29.10.2024

Дополнительные материалы по комбинаторике

1. М. Холл, *Комбинаторика*. М.: Мир, 1970.
2. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*. М.: Мир, 1990.

Слайды по дискретной математике будут публиковаться по адресу

<https://logic.pdmi.ras.ru/~pastor/ITM0/2024-25/>

Основные комбинаторные числа: число размещений

- *Число размещений* из n элементов по k — это количество последовательностей длины k , составленных из различных элементов n -элементного множества. Обозначается A_n^k .
- Это число можно интерпретировать как
 - ▶ число инъективных отображений $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$;
 - ▶ число способов разложить k шаров по n ящикам (шары имеют номера от $1 \div k$, ящики — $1 \div n$, в ящик помещается не более одного шара).
- *Число размещений с повторениями* из n элементов по k — это количество последовательностей длины k , составленных из элементов n -элементного множества. Обозначается \tilde{A}_n^k .
- Это число можно интерпретировать как
 - ▶ число отображений $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$;
 - ▶ число способов разложить k шаров по n ящикам (шары имеют номера от $1 \div k$, ящики — от $1 \div n$, в ящик можно класть любое число шаров).
- Мы уже доказывали, что $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$ и $\tilde{A}_n^k = n^k$.

Основные комбинаторные числа: число сочетаний

- *Число сочетаний* из n элементов по k — это количество k -элементных подмножеств в n -элементном множестве (где $0 \leq k \leq n$).
- Возможные обозначения: C_n^k или $\binom{n}{k}$.
- Это число можно интерпретировать как
 - ▶ число строго монотонно возрастающих функций $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$;
 - ▶ число способов разложить k одинаковых шаров по n пронумерованным ящикам (в каждый ящик помещается не более одного шара).

Теорема

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказательство. Пусть $|X| = n$.

- Есть $A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ способов выбрать последовательность из k различных элементов X .
- Каждая такая последовательность задает k -элементное подмножество X .
- Каждое подмножество посчитано $k!$ раз, ибо его элементы можно упорядочить $k!$ способами. Итого, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ различных подмножеств. □

Основные комбинаторные числа: число сочетаний с повторениями

- *Число сочетаний с повторениями* из n элементов по k — это количество неупорядоченных наборов из k элементов n -элементного множества (в отличие от множества, в наборе один и тот же элемент может встречаться несколько раз).
- Возможные обозначения: \tilde{C}_n^k или $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$.
- Это число можно интерпретировать как
 - ▶ число нестрого монотонно возрастающих функций $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$;
 - ▶ число способов разложить k неразличимых шаров по n ящикам (в ящик можно класть любое число шаров);
 - ▶ число способов выбрать k предметов, если есть предметы n типов (на складе есть хотя бы по k предметов каждого типа; предметы одного типа абсолютно неразличимы).

Формула для числа сочетаний с повторениями

Теорема

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k.$$

Лемма

Число решений уравнения $t_1 + t_2 + \dots + t_n = k$ в \mathbb{N}_0 равно \tilde{C}_n^k . (1)

Доказательство. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

- Строим биекцию между решениями уравнения (1) и неупорядоченными наборами из k элементов множества X .
- Каждому решению (t_1, t_2, \dots, t_n) ставим в соответствие набор, состоящий из t_1 экземпляров элемента x_1 , t_2 экземпляров x_2 , \dots , t_n экземпляров x_n .
- Обратно, каждому набору \mathcal{T} ставим в соответствие решение (t_1, t_2, \dots, t_n) , где t_i — число экземпляров x_i в \mathcal{T} . □

Формула для числа сочетаний с повторениями: доказательство

Доказательство теоремы.

- Расположим в ряд k шариков и $n - 1$ перегородку.
- Всего есть C_{n+k-1}^k таких расположений.
- Обозначим через t_1 число шариков до первой перегородки; t_2 — между первой и второй перегородками; \dots ; t_n — после $(n - 1)$ -й перегородки.
- Получаем биекцию между решениями уравнения (1) и такими расположениями шаров и перегородок.



Свойства чисел сочетаний

- $C_n^k = C_n^{n-k}$ (очевидно).

- $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Доказательство. $C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$
 $= \frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}.$ □

Другой способ доказательства. Пусть $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

- ▶ $(k+1)$ -элементные подмножества X бывают двух видов: содержащие x_0 и не содержащие x_0 .
- ▶ Если $x_0 \notin S \subset X$, то $S \subset X' = \{x_1, \dots, x_n\}$. Таких подмножеств C_n^{k+1} .
- ▶ Если $x_0 \in S \subset X$, то удалим x_0 из S . Получим подмножество $S' \subset X'$, где $|S'| = k$. Таких подмножеств C_n^k . □

Большинство соотношений на C_n^k имеют как алгебраическое, так и комбинаторное доказательство.

- Треугольник Паскаля

				1						
			1		1					
		1		2		1				
	1		3		3		1			
1		4		6		4		1		
	1	5		10		10		5		1

- $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Доказательство.

Алгебраически:

$$kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = nC_{n-1}^{k-1}.$$

Комбинаторно: Как в левой, так и в правой части формулы записано число k -элементных подмножеств n -элементного множества, в которых один элемент отмечен.



Свойства чисел сочетаний

- (Бином Ньютона) $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$.

Доказательство.

► $(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b) \dots (a + b)}_{n \text{ скобок}};$

► слагаемое $a^{n-k} b^k$ получается, если из k скобок выбрать b , а из остальных — a .

► Это можно сделать C_n^k способами. □

- Другое название чисел C_n^k — *биномиальные коэффициенты*.

- $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n$.

► Комбинаторное доказательство: в левой и в правой части записано число подмножеств n -элементного множества. □

- $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = (1 - 1)^n = 0$.

- $C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots = 2^{n-1}$.

Свойства чисел сочетаний

Докажем формулу $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$ комбинаторно.

Доказательство. Докажем, что $C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots$

- Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- Построим биекцию между всеми четными и всеми нечетными подмножествами X .
- Пусть $f(S) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} S \cup \{x_n\}, & x_n \notin S \\ S \setminus \{x_n\}, & x_n \in S. \end{cases}$
- Получаем отображение $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, обладающее следующим свойством: $\forall S (f(f(S)) = S)$.
 - ▶ Отображение, обладающее таким свойством называется **инволюцией**.
 - ▶ В частности, это означает, что f обратно самому себе, следовательно, f — биекция.
- При этом, $|S|$ и $|f(S)|$ всегда имеют разную четность.
- Таким образом, f также задает биекцию между всем четными и всеми нечетными подмножествами X .



Определение

Пусть $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$, где $m \in \mathbb{N}$ и $n, k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0$. Тогда число способов разбить n -элементное множество X на m непересекающихся подмножеств X_1, X_2, \dots, X_m , где $|X_i| = k_i$, обозначается $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$ и называется **мультиномиальным коэффициентом**.
(Другое название: **полиномиальный коэффициент**.)

Теорема

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Доказательство. Есть $n!$ способов упорядочить элементы множества X .

- Для каждого способа, помещаем первые k_1 элементов в X_1 ; следующие k_2 элементов в X_2 и т. д.
- Получаем разбиение X на подмножества нужного размера.
- Каждое разбиение посчитано $k_1! k_2! \dots k_m!$ раз. □

Теорема

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству Бинома Ньютона.

- При раскрытии скобок слагаемое $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$ получается, если выбрать из k_1 скобок слагаемое a_1 , из k_2 скобок слагаемое a_2 , ..., из k_m скобок слагаемое a_m .

- Такой выбор можно сделать в точности $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$ способами. □

Примеры

1. Пусть A, B — конечные множества. Тогда

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

2. Пусть A, B, C — конечные множества. Тогда

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = \\ = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + \\ + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

Формула включений-исключений

Теорема (Формула включений-исключений)

Пусть A_1, \dots, A_n — конечные множества. Тогда

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [1..n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|. \quad (1)$$

Доказательство.

- ▶ Пусть $x \in A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ и x не принадлежит остальным A_j .
- ▶ Тогда x учитывается в формуле (1) с коэффициентом

$$\sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell+1} C_k^{\ell} = 1.$$



Формула включений-исключений

Следствие (другая формулировка формулы включений-исключений)

Пусть X — конечное множество, $|X| = N$;

- P_1, \dots, P_n — свойства элементов множества X (т. е. одноместные предикаты на X);
- N_{i_1, \dots, i_k} — число элементов, удовлетворяющих P_{i_1}, \dots, P_{i_k} ;
- $N(0)$ — число элементов, не удовлетворяющих ни одному свойству.

Тогда

$$\begin{aligned} N(0) = N - \sum_i N_i + \sum_{i_1 < i_2} N_{i_1, i_2} - \dots \\ \dots + (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} N_{i_1, \dots, i_k} + \dots \\ \dots + (-1)^n N_{1, \dots, n}. \quad (2) \end{aligned}$$

Субфакториалы (задача о беспорядках)

Определение

- *Перестановкой* на множестве M называется произвольная биекция $\sigma: M \rightarrow M$.
- *Неподвижной точкой* перестановки σ называется такой элемент $x \in M$, что $\sigma(x) = x$.
- S_n — множество всех перестановок на $[1..n]$.

Замечание

Мы знаем, что $|S_n| = n!$.

Определение

$D(n)$ — число перестановок из S_n , не имеющих неподвижных точек.

Субфакториалы: рекуррентная формула

Теорема

$$D(n+1) = n(D(n) + D(n-1)).$$

Доказательство.

- ▶ Пусть $\sigma \in S_{n+1}$; $k = \sigma(n+1)$; $\ell = \sigma^{-1}(n+1)$.
- ▶ Возможны два случая: $k \neq \ell$ или $k = \ell$.

1° Пусть $k \neq \ell$.

- Тогда $\sigma'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sigma(x), & x \neq \ell \\ k, & x = \ell \end{cases}$ — перестановка из S_n без неподвижных точек.

- Для каждого $k \in [1..n]$ есть $D(n)$ таких перестановок.

2° Пусть $k = \ell$.

- Тогда $\sigma|_{[1..n] \setminus \{k\}}$ — перестановка на $[1..n] \setminus \{k\}$ без неподвижных точек.
- Для каждого $k \in [1..n]$ есть $D(n-1)$ таких перестановок.

- ▶ Итого, получаем $nD(n) + nD(n-1)$ перестановок без неподвижных точек. □

Субфакториалы: явная формула

Замечание

Для обычных факториалов выполняется такое же соотношение:

$$(n+1)! = n(n! + (n-1)!).$$

Поэтому числа $D(n)$ называют *субфакториалами*.

Теорема

$$D(n) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Доказательство. Пусть $X = S_n$.

- P_i — свойство “ $\sigma(i) = i$ ” для перестановки $\sigma \in S_n$.
- Тогда $N = n!$ и $N_{i_1, \dots, i_k} = (n-k)!$.
- По формуле (2) имеем: $D(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)! C_n^k = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$

□

Субфакториалы: явная формула

Следствие

$$D(n) = \text{round}\left(\frac{n!}{e}\right); \text{ более того, } \left|D(n) - \frac{n!}{e}\right| < \frac{1}{n+1}.$$

Доказательство. Напомним, что $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Тогда

- $$\begin{aligned} \bullet \frac{n!}{e} &= n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \\ &= D(n) + (-1)^{n+1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!}; \end{aligned}$$
- $$\bullet \left|D(n) - \frac{n!}{e}\right| = \left| \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!} \right| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots \right|;$$
- $$\bullet \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!} = \left(\frac{n!}{(n+1)!} - \frac{n!}{(n+2)!} \right) + \left(\frac{n!}{(n+3)!} - \frac{n!}{(n+4)!} \right) + \dots > 0;$$
- $$\bullet \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1} n!}{(n+\ell)!} = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{n!}{(n+2)!} - \frac{n!}{(n+3)!} \right) - \left(\frac{n!}{(n+4)!} - \frac{n!}{(n+5)!} \right) - \dots < \frac{1}{n+1}. \quad \square$$

Функция Эйлера

Определение

- Натуральные числа a и b называются **взаимно простыми**, если у них нет общего натурального делителя, отличного от единицы.
- $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел, меньше либо равных n и взаимно простых с n (**функция Эйлера**).

Теорема

Пусть $n = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}$ (где p_1, \dots, p_s — различные простые и a_1, \dots, a_s — натуральные числа). Тогда $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_s})$.

Доказательство. Пусть $X = [1..n]$.

- P_i — свойство " $x \vdots p_i$ " для числа $x \in X$.
- Тогда $N_{i_1, \dots, i_k} = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}$.
- По формуле (2) имеем:

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}} = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_s}).$$



Число сюръективных отображений

Теорема

Число сюръективных отображений $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$ равно $\sum_{s=1}^n (-1)^{n-s} C_n^s s^k$.

Доказательство.

- Пусть X — множество всех отображений $f: [1..k] \rightarrow [1..n]$.
- P_i — свойство " $f^{-1}(i) = \emptyset$ " для отображения $f \in X$.
 - ▶ Тогда $N = |X| = n^k$;
 - ▶ $N_{i_1, \dots, i_\ell} = (n - \ell)^k$ — количество функций, удовлетворяющих данным ℓ свойствам.
 - ▶ $f \in X$ — сюръекция $\Leftrightarrow f$ не удовлетворяет ни одному из свойств.
- Следовательно, число сюръекций равно $N(0)$.
- По формуле включений-исключений имеем:

$$N(0) = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell C_n^\ell (n - \ell)^k = \sum_{s=1}^n (-1)^{n-s} C_n^s s^k.$$

(Последнее равенство получено заменой переменной $s = n - \ell$).

