

# **Вопросы по курсу дискретной математики. 2022-23 г, 1 семестр**

## **I. Множества и отображения**

- 1.** Основные понятия теории множеств: множество, элемент, подмножество. Основные операции над множествами.
- 2.** Бинарные и  $n$ -арные отношения. Определения и примеры. Основные свойства отношений. Отношение эквивалентности. Отношение порядка.
- 3.** Понятие отображения. Образ и прообраз элемента. Инъекция, сюръекция и биекция. Композиция отображений. Обратное отображение. Критерий обратимости.
- 4.** Число элементов декартова произведения двух и нескольких множеств. Количество подмножеств данного множества.
- 5.** Число отображений из одного множества в другое. Число инъекций. Число перестановок данного множества. Размещения и размещения с повторениями.
- 6.** Счётные множества. Определение и примеры. Счётность декартова произведения счётных множеств.
- 7.** Теорема о бесконечном подмножестве счётного множества. Понятие не более чем счётного множества и их основные свойства.
- 8.** Счётность множества рациональных чисел.
- 9.** Теорема об объединении не более чем счётных множеств.
- 10.** Пример несчётного множества. Существование трансцендентных чисел.
- 11.** Понятие мощности множества. Теорема о счётном подмножестве бесконечного множества.
- 12.** Формулировка аксиомы выбора. Примеры теорем, которые невозможно доказать без использования этой аксиомы.
- 13.** Следствия об объединении и разности бесконечного множества и счётного множества. Примеры множеств мощности континуума.
- 14.** Сравнение мощностей. Определение, теорема Кантора-Бернштейна (формулировка), континуум-гипотеза. Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств.

## **II. Основы математической логики**

- 15.** Булевы функции. Определение, задание таблицей истинности, количество булевых функций от  $n$  переменных. Примеры булевых функций от 1 и 2 переменных.
- 16.** Формулы исчисления высказываний. Связь с булевыми функциями. Эквивалентность формул, примеры. Тавтологии, выполнимые формулы и противоречия.
- 17.** Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы. СКНФ и СДНФ. Существование и единственность представления булевой функции в виде СКНФ и СДНФ. Полные системы булевых функций.
- 18.** Алгоритм приведения булевой функции к СКНФ и СДНФ эквивалентными заменами.
- 19.** Аксиомы и правила вывода в исчислении высказываний. Пример логического вывода.
- 20.** Язык исчисления предикатов. Термы и формулы исчисления предикатов. Свободные и связанные вхождения переменных.
- 21.** Интерпретация формул исчисления предикатов. Общезначимые и выполнимые формулы.

## **III. Элементарная комбинаторика**

- 22.** Число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ . Формула для числа сочетаний.
- 23.** Число сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $k$ . Формула для числа сочетаний с повторениями.
- 24.** Простейшие свойства биномиальных коэффициентов. Алгебраические и комбинаторные доказательства. Треугольник Паскаля.
- 25.** Бином Ньютона. Сумма и знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов (алгебраические и комбинаторные доказательства).
- 26.** Мультиномиальные коэффициенты. Определение и формула. Обобщенный бином Ньютона.
- 27.** Формула включений-исключений. Переформулировка этой формулы в терминах свойств.
- 28.** Субфакториалы. Определение и рекуррентное соотношение для субфакториалов. Связь с обычными факториалами.
- 29.** Явная формула для субфакториала. Следствие о ближайшем целом числе к  $\frac{n!}{e}$ .

**30.** Функция Эйлера. Определение и формула (доказательство с помощью формулы включений-исключений).

**31.** Формула для числа сюръекций.

#### **IV. Разбиения чисел**

**32.** Упорядоченные и неупорядоченные разбиения. Формула для числа упорядоченных разбиений.

**33.** Упорядоченные разбиения на нечетные слагаемые.

**34.** Неупорядоченные разбиения. Связь с диаграммами Юнга. Запись в виде решений специального уравнения.

**35.** Рекуррентная формула для числа разбиений на фиксированное число слагаемых.

**36.** Явные формулы для числа разбиений на 2 и 3 слагаемых.

**37.** Формула для количества разбиений числа  $n$  на  $t$  различных слагаемых.

**38.** Пентагональная формула Эйлера.

#### **V. Рекуррентные соотношения в комбинаторике**

**39.** Числа Фибоначчи. Определение и формулы суммы чисел Фибоначчи.

**40.** Числа Каталана. Определение и простейшие интерпретации (скобочные последовательности, последовательности единиц и минус единиц, пути на клетчатой сетке).

**41.** Принцип отражений. Явная формула для чисел Каталана.

**42.** Числа Каталана и триангуляции многоугольника.

#### **Вопросы, 2 семестр**

**43.** Доказательство явной формулы для чисел Каталана при помощи триангуляций.

**44.** Числа Белла. Определение и рекуррентная формула.

**45.** Треугольник Белла.

**46.** Числа Стирлинга второго рода. Определение и значения для частных случаев.

**47.** Рекуррентная формула для чисел Стирлинга второго рода.

**48.** Связь чисел Стирлинга второго рода и числа сюръекций. Явная формула для чисел Стирлинга второго рода.

**49.** Числа Стирлинга второго рода и многочлены.

**50.** Числа Стирлинга первого рода. Определение и рекуррентная формула.

**51.** Числа Стирлинга первого рода и многочлены.

**52.** Связь чисел Стирлинга первого и второго рода.

#### **VI. Цепи и антицепи**

**53.** Цепи и антицепи в конечном частично упорядоченном множестве. Представление частично упорядоченного множества в виде орграфа. Цепи и антицепи с точки зрения графов. Теорема Мирского.

**54.** Теорема Дилуорса. Доказательство при помощи теоремы Кёнига.

**55.** Вывод теоремы Кёнига из теоремы Дилуорса.

**56.** Теорема Эрдёша-Секереша о монотонных подпоследовательностях.

**57.** Разбиение множества всех подмножеств конечного множества на симметричные цепи. Теорема Шпернера о максимальной антицепи в множестве всех подмножеств.

**58.** Неравенство Любелла-Ямamoto-Мешалкина для антицепи в множестве всех подмножеств данного множества.

#### **VII. Производящие функции**

**59.** Производящие функции. Определение и простейшие примеры в случае, когда производящая функция — многочлен. Доказательство формулы суммы квадратов биномиальных коэффициентов при помощи производящих функций.

**60.** Степенной ряд как функция: формулировки основных теорем о сходимости степенных рядов.

**61.** Кольцо формальных степенных рядов. Определение и доказательство того, что это кольцо.

**62.** Обратимые элементы кольца формальных степенных рядов. Сумма геометрической прогрессии с точки зрения формальных степенных рядов.

- 63.** Производящая функция для чисел Фибоначчи. Вывод явной формулы для чисел Фибоначчи при помощи производящих функций.
- 64.** Производящая функция для чисел Каталана. Вывод явной формулы для чисел Каталана при помощи производящих функций.
- 65.** Предел последовательности формальных степенных рядов. Определение и основные свойства.
- 66.** Дискретное нормирование в кольце формальных степенных рядов и его связь с пределом последовательности.
- 67.** Бесконечные суммы и бесконечные произведения формальных степенных рядов. Критерии их сходимости.
- 68.** Композиция формальных степенных рядов. Формальное определение и условия при которых она корректно определена.
- 69.** Производящая функция для числа разбиений. Доказательство утверждения о разбиениях на нечетные и на различные слагаемые при помощи производящих функций.
- 70.** Формальная производная формальных степенных рядов. Определение и основные свойства. Связь с формальными степенными рядами от двух переменных.
- 71.** Логарифмическая производная формального степенного ряда. Определение и основные свойства.
- 72.** Логарифмирование и экспоненцирование формальных степенных рядов.
- 73.** Понятие экспоненциальной производящей функции. Экспоненциальная производящая функция для последовательности  $a_0 = a_1 = 1$ ,  $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$  при  $n \geq 2$ .
- 74.** Экспоненциальные производящие функции чисел Стирлинга и Белла.
- 75.** Формальное возведение в степень. Определение и основные свойства.
- 76.** Формальный степенной ряд для  $(1+x)^\alpha$  (биномиальный ряд).
- 77.** Многомерные производящие функции. Определение и два примера, связанных с биномиальными коэффициентами.
- 78.** Разбиения целочисленных векторов. Двумерная производящая функция для числа этих разбиений. Необходимое и достаточное условие того, что это число не 0.
- 79.** Разбиения целочисленных векторов. Замена переменных и лемма о независимости числа разбиений от одной из новых переменных.
- 80.** Разбиения целочисленных векторов. Лемма о связи с разбиениями чисел.
- 81.** Тождество Гаусса-Якоби. Вывод пентагональной формулы Эйлера из тождества Гаусса-Якоби.
- 82.** Рекуррентная формула для числа разбиений (доказательство при помощи пентагональной формулы Эйлера).

### **VIII. Дискретная вероятность и вероятностные методы**

- 83.** Дискретное вероятностное пространство. Основные определения и примеры.
- 84.** Условная вероятность. Определение, формула полной вероятности. Формула Байеса и теорема Байеса.
- 85.** Независимые события. Определение, примеры и свойства.
- 86.** Случайные величины. Определение и примеры. Распределение случайной величины. Независимые случайные величины.
- 87.** Математическое ожидание. Определение и свойства.
- 88.** Доказательство нижней оценки для  $r(k, k)$  на языке теории вероятностей.
- 89.** Теорема Эрдёша-Мозера о наименьшем ациклическом подтурнире.
- 90.** Теорема Клейтмана-Спенсера об  $(n, k)$ -универсальных множествах.
- 91.** Лемма об экспоненте. Следствие о  $(n, k)$ -универсальных множествах малого размера.
- 92.** Факты о матожидании: оценки наибольшего и наименьшего значения случайной величины и неравенство Маркова.
- 93.** Теорема Селе о количестве гамильтоновых путей в турнире.
- 94.** Теорема Алона о размере доминирующего множества.
- 95.** Вероятностное доказательство теоремы Эрдёша о хроматическом числе и обхвате графа. Два утверждения о стремящихся к нулю вероятностях — без доказательства.

**96.** Доказательства утверждений о стремлении к нулю вероятности того, что в случайному графе будет много длинных циклов и будет большое независимое множество (из доказательства теоремы Эрдёша о хроматическом числе и обхвате графа).

## **IX. Перечисление непомеченных объектов**

**97.** Помеченные графы и графы с точностью до изоморфизма. Группа автоморфизмов графа и её свойства.

**98.** Задача о числе раскрасок  $p$  точек на окружности с точностью до поворота в случае простого  $p$ . Вывод малой теоремы Ферма из решения этой задачи.

**99.** Лемма Бернсайда о подсчете числа орбит.

**100.** Задача о числе раскрасок  $n$  точек на окружности с точностью до поворота. Решение для общего случая.

**101.** Задача о числе раскрасок  $n$  точек на окружности с точностью до поворота и осевой симметрии. Решение для общего случая.