

Вопросы по курсу дискретной математики. 2022-23 г, 1 семестр

I. Множества и отображения

1. Основные понятия теории множеств: множество, элемент, подмножество. Основные операции над множествами.
2. Бинарные и n -арные отношения. Определения и примеры. Основные свойства отношений. Отношение эквивалентности. Отношение порядка.
3. Понятие отображения. Образ и прообраз элемента. Инъекция, сюръекция и биекция. Композиция отображений. Обратное отображение. Критерий обратимости.
4. Число элементов декартова произведения двух и нескольких множеств. Количество подмножеств данного множества.
5. Число отображений из одного множества в другое. Число инъекций. Число перестановок данного множества. Размещения и размещения с повторениями.
6. Счётные множества. Определение и примеры. Счётность декартова произведения счётных множеств.
7. Теорема о бесконечном подмножестве счётного множества. Понятие не более чем счётного множества и их основные свойства.
8. Счётность множества рациональных чисел.
9. Теорема об объединении не более чем счётных множеств.
10. Пример несчётного множества. Существование трансцендентных чисел.
11. Понятие мощности множества. Теорема о счётном подмножестве бесконечного множества.
12. Формулировка аксиомы выбора. Примеры теорем, которые невозможно доказать без использования этой аксиомы.
13. Следствия об объединении и разности бесконечного множества и счётного множества. Примеры множеств мощности континуума.
14. Сравнение мощностей. Определение, теорема Кантора-Бернштейна (формулировка), континуум-гипотеза. Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств.

II. Основы математической логики

15. Булевы функции. Определение, задание таблицей истинности, количество булевых функций от n переменных. Примеры булевых функций от 1 и 2 переменных.
16. Формулы исчисления высказываний. Связь с булевыми функциями. Эквивалентность формул, примеры. Тавтологии, выполнимые формулы и противоречия.
17. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы. СКНФ и СДНФ. Существование и единственность представления булевой функции в виде СКНФ и СДНФ. Полные системы булевых функций.
18. Алгоритм приведения булевой функции к СКНФ и СДНФ эквивалентными заменами.
19. Аксиомы и правила вывода в исчислении высказываний. Пример логического вывода.
20. Язык исчисления предикатов. Термы и формулы исчисления предикатов. Свободные и связанные вхождения переменных.
21. Интерпретация формул исчисления предикатов. Общезначимые и выполнимые формулы.

III. Элементарная комбинаторика

22. Число сочетаний из n элементов по k . Формула для числа сочетаний.
23. Число сочетаний с повторениями из n элементов по k . Формула для числа сочетаний с повторениями.
24. Простейшие свойства биномиальных коэффициентов. Алгебраические и комбинаторные доказательства. Треугольник Паскаля.
25. Бином Ньютона. Сумма и знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов (алгебраические и комбинаторные доказательства).
26. Мультиномиальные коэффициенты. Определение и формула. Обобщенный бином Ньютона.
27. Формула включений-исключений. Переформулировка этой формулы в терминах свойств.
28. Субфакториалы. Определение и рекуррентное соотношение для субфакториалов. Связь с обычными факториалами.
29. Явная формула для субфакториала. Следствие о ближайшем целом числе к $\frac{n!}{e}$.

30. Функция Эйлера. Определение и формула (доказательство с помощью формулы включений-исключений).

31. Формула для числа сюръекций.

IV. Разбиения чисел

32. Упорядоченные и неупорядоченные разбиения. Формула для числа упорядоченных разбиений.

33. Упорядоченные разбиения на нечетные слагаемые.

34. Неупорядоченные разбиения. Связь с диаграммами Юнга. Запись в виде решений специального уравнения.

35. Рекуррентная формула для числа разбиений на фиксированное число слагаемых.

36. Явные формулы для числа разбиений на 2 и 3 слагаемых.

37. Формула для количества разбиений числа n на m различных слагаемых.

38. Пентагональная формула Эйлера.

V. Рекуррентные соотношения в комбинаторике

39. Числа Фибоначчи. Определение и формулы суммы чисел Фибоначчи.

40. Числа Каталана. Определение и простейшие интерпретации (скобочные последовательности, последовательности единиц и минус единиц, пути на клетчатой сетке).

41. Принцип отражений. Явная формула для чисел Каталана.

42. Числа Каталана и триангуляции многоугольника.

Вопросы, 2 семестр

43. Доказательство явной формулы для чисел Каталана при помощи триангуляций.

44. Числа Белла. Определение и рекуррентная формула.

45. Треугольник Белла.

46. Числа Стирлинга второго рода. Определение и значения для частных случаев.

47. Рекуррентная формула для чисел Стирлинга второго рода.

48. Связь чисел Стирлинга второго рода и числа сюръекций. Явная формула для чисел Стирлинга второго рода.

49. Числа Стирлинга второго рода и многочлены.

50. Числа Стирлинга первого рода. Определение и рекуррентная формула.

51. Числа Стирлинга первого рода и многочлены.

52. Связь чисел Стирлинга первого и второго рода.

VI. Цепи и антицепи

53. Цепи и антицепи в конечном частично упорядоченном множестве. Представление частично упорядоченного множества в виде орграфа. Цепи и антицепи с точки зрения графов. Теорема Мирского.

54. Теорема Дилуорса. Доказательство при помощи теоремы Кёнига.

55. Вывод теоремы Кёнига из теоремы Дилуорса.

56. Теорема Эрдёша-Секереша о монотонных подпоследовательностях.

57. Разбиение множества всех подмножеств конечного множества на симметричные цепи. Теорема Шпернера о максимальной антицепи в множестве всех подмножеств.

58. Неравенство Любелла-Ямамото-Мешалкина для антицепи в множестве всех подмножеств данного множества.

VII. Производящие функции

59. Производящие функции. Определение и простейшие примеры в случае, когда производящая функция — многочлен. Доказательство формулы суммы квадратов биномиальных коэффициентов при помощи производящих функций.

60. Степенной ряд как функция: формулировки основных теорем о сходимости степенных рядов.

61. Кольцо формальных степенных рядов. Определение и доказательство того, что это кольцо.

62. Обратимые элементы кольца формальных степенных рядов. Сумма геометрической прогрессии с точки зрения формальных степенных рядов.

- 63.** Производящая функция для чисел Фибоначчи. Вывод явной формулы для чисел Фибоначчи при помощи производящих функций.
- 64.** Производящая функция для чисел Каталана. Вывод явной формулы для чисел Каталана при помощи производящих функций.
- 65.** Предел последовательности формальных степенных рядов. Определение и основные свойства.
- 66.** Дискретное нормирование в кольце формальных степенных рядов и его связь с пределом последовательности.
- 67.** Бесконечные суммы и бесконечные произведения формальных степенных рядов. Критерии их сходимости.
- 68.** Композиция формальных степенных рядов. Формальное определение и условия при которых она корректно определена.
- 69.** Производящая функция для числа разбиений. Доказательство утверждения о разбиениях на нечетные и на различные слагаемые при помощи производящих функций.
- 70.** Формальная производная формальных степенных рядов. Определение и основные свойства. Связь с формальными степенными рядами от двух переменных.
- 71.** Логарифмическая производная формального степенного ряда. Определение и основные свойства.
- 72.** Логарифмирование и экспоненцирование формальных степенных рядов.
- 73.** Понятие экспоненциальной производящей функции. Экспоненциальная производящая функция для последовательности $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ при $n \geq 2$.
- 74.** Экспоненциальные производящие функции чисел Стирлинга и Белла.
- 75.** Формальное возведение в степень. Определение и основные свойства.
- 76.** Формальный степенной ряд для $(1+x)^\alpha$ (биномиальный ряд).
- 77.** Многомерные производящие функции. Определение и два примера, связанных с биномиальными коэффициентами.
- 78.** Разбиения целочисленных векторов. Двумерная производящая функция для числа этих разбиений. Необходимое и достаточное условие того, что это число не 0.
- 79.** Разбиения целочисленных векторов. Замена переменных и лемма о независимости числа разбиений от одной из новых переменных.
- 80.** Разбиения целочисленных векторов. Лемма о связи с разбиениями чисел.
- 81.** Тождество Гаусса-Якоби. Вывод пентагональной формулы Эйлера из тождества Гаусса-Якоби.
- 82.** Рекуррентная формула для числа разбиений (доказательство при помощи пентагональной формулы Эйлера).

VIII. Дискретная вероятность и вероятностные методы

- 83.** Дискретное вероятностное пространство. Основные определения и примеры.
- 84.** Условная вероятность. Определение, формула полной вероятности. Формула Байеса и теорема Байеса.
- 85.** Независимые события. Определение, примеры и свойства.
- 86.** Случайные величины. Определение и примеры. Распределение случайной величины. Независимые случайные величины.
- 87.** Математическое ожидание. Определение и свойства.
- 88.** Доказательство нижней оценки для $r(k, k)$ на языке теории вероятностей.
- 89.** Теорема Эрдёша-Мозера о наименьшем ациклическом подтурнире.
- 90.** Теорема Клейтмана-Спенсера об (n, k) -универсальных множествах.
- 91.** Лемма об экспоненте. Следствие о (n, k) -универсальных множествах малого размера.
- 92.** Факты о матожидании: оценки наибольшего и наименьшего значения случайной величины и неравенство Маркова.
- 93.** Теорема Селе о количестве гамильтоновых путей в турнире.
- 94.** Теорема Алона о размере доминирующего множества.
- 95.** Вероятностное доказательство теоремы Эрдёша о хроматическом числе и обхвате графа. Два утверждения о стремящихся к нулю вероятностях — без доказательства.

96. Доказательства утверждений о стремлении к нулю вероятности того, что в случайном графе будет много длинных циклов и будет большое независимое множество (из доказательства теоремы Эрдёша о хроматическом числе и обхвате графа).

IX. Перечисление непомеченных объектов

97. Помеченные графы и графы с точностью до изоморфизма. Группа автоморфизмов графа и её свойства.

98. Задача о числе раскрасок p точек на окружности с точностью до поворота в случае простого p . Вывод малой теоремы Ферма из решения этой задачи.

99. Лемма Бернсайда о подсчете числа орбит.

100. Задача о числе раскрасок n точек на окружности с точностью до поворота. Решение для общего случая.

101. Задача о числе раскрасок n точек на окружности с точностью до поворота и осевой симметрии. Решение для общего случая.