

Дискретная математика

Глава 7. Метод производящих функций

А. В. Пастор

27.03.2023

Производящие функции

- Пусть (a_0, a_1, a_2, \dots) — произвольная последовательность чисел.
- Производящей функцией* последовательности (a_n) называется выражение

$$A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} a_k x^k.$$

- Например, пусть $a_k = C_n^k$ (где $n \in \mathbb{N}$ — фиксировано). Тогда

$$A(x) = \sum_{k \geq 0} C_n^k x^k = (1 + x)^n.$$

- То есть $(1 + x)^n$ — производящая функция для последовательности C_n^k .
- Еще одним примером построения производящей функции является доказанное в главе 6 равенство

$$\sum_{k=0}^n s(n, k) x^k = x(x - 1) \dots (x - n + 1).$$

- То есть $x(x - 1) \dots (x - n + 1)$ — это производящая функция для чисел Стирлинга первого рода (при фиксированном n).

Производящие функции: примеры

- При помощи алгебраических преобразований таких выражений часто удается доказывать те или иные свойства комбинаторных величин.
- В качестве примера рассмотрим формулу, которую мы доказывали на практике: $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \sum_{k \geq 0} C_{2n}^k x^k &= (1+x)^{2n} = ((1+x)^n)^2 = \left(\sum_{\ell \geq 0} C_n^\ell x^\ell \right) \left(\sum_{\ell \geq 0} C_n^\ell x^\ell \right) = \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{\ell=0}^k C_n^\ell C_n^{k-\ell} \right) x^k.\end{aligned}$$

► Приравнивая коэффициенты при $k = n$, получаем

$$C_{2n}^n = \sum_{\ell=0}^n C_n^\ell C_n^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^n (C_n^\ell)^2.$$

□

- В рассмотренных выше примерах, последовательность была конечной (точнее, включала конечное число ненулевых членов). Поэтому производящая функция оказывалась многочленом.
- Несколько сложнее обстоит дело с бесконечными последовательностями. Для них нужно рассматривать степенные ряды.

Степенные ряды с точки зрения математического анализа

Пусть $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ — степенной ряд. Мы можем смотреть на него как на функцию от x . Она будет определена при всех $x \in \mathbb{R}$, для которых этот ряд сходится. Из матанализа известны следующие свойства таких рядов.

- Существует такая константа $R \in [0, +\infty]$, что при $|x| < R$ ряд $A(x)$ сходится абсолютно и при $|x| > R$ ряд $A(x)$ расходится.
 - ▶ Такая константа R называется *радиусом сходимости* степенного ряда.
 - ▶ Если брать $x \in \mathbb{C}$, то ряд $A(x)$ будет абсолютно сходиться внутри *круга сходимости* (т. е. круга радиуса R с центром в нуле) и расходиться вне этого круга.
 - ▶ При $|x| = R$ ряд $A(x)$ может как сходиться, так и расходиться.
- При любом $r < R$ ряд $A(x)$ равномерно сходится на отрезке $[-r, r]$.
Следовательно, функция $A(x)$ непрерывна и дифференцируема на всем интервале $(-R, R)$.
- Ряд $A(x)$ можно *почленно дифференцировать*.
 - ▶ То есть $A'(x) = \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}$. При этом, ряды для $A(x)$ и $A'(x)$ имеют одинаковые радиусы сходимости.

Степенные ряды с точки зрения математического анализа

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Пастор

- Аналогично, ряд $A(x)$ можно *почленно интегрировать*.

► То есть $\int_0^x A(t) dt = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$.

- При этом, ряды для $A(x)$ и её первообразной функции имеют одинаковые радиусы сходимости.

- Если значения функций $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ и $B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$ совпадают всюду в некоторой окрестности нуля, то есть, если

$$\exists \delta > 0 \forall x \in [0, \delta) \left(\sum_{k \geq 0} a_k x^k = \sum_{k \geq 0} b_k x^k \right),$$

то $\forall i a_i = b_i$.

- Таким образом, если степенной ряд имеет ненулевой радиус сходимости, то последовательность однозначно задается своей производящей функцией.
- Однако бывают и степенные ряды с нулевым радиусом сходимости. Таков, например, ряд $\sum_{k \geq 0} k! x^k$. Такие ряды сходятся только при $x = 0$ и говорить о задаваемой ими функции бессмысленно.

Формальные степенные ряды

Другой подход заключается в том, что выражение $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ можно рассматривать как *формальный степенной ряд*.

- То есть мы смотрим на это выражение как на формальную запись.

Мы не будем пытаться подставлять какие-либо числа вместо x и выяснять, сходится ли получившийся ряд и к какому именно пределу он сходится.

- ▶ Единственным исключением здесь является случай $x = 0$: мы будем формально полагать, что $A(0) \stackrel{\text{def}}{=} a_0$.
- Строго говоря, формальный степенной ряд **не является функцией**.
- Формальный степенной ряд однозначно задается последовательностью своих коэффициентов.
 - ▶ Можно считать, что формальный степенной ряд $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ — это и есть последовательность (a_0, a_1, a_2, \dots) .
 - ▶ Переменная x и её степени пишутся здесь исключительно для удобства.
 - ▶ В итоге получится определение кольца формальных степенных рядов, очень похожее на определение кольца многочленов.

Кольцо формальных степенных рядов

Определение

Пусть K — коммутативное кольцо.

- **Кольцо формальных степенных рядов** над K состоит из бесконечных последовательностей (a_0, a_1, a_2, \dots) с коэффициентами из K .
- Сложение и умножение в кольце формальных степенных рядов осуществляется по следующим формулам.

Пусть $A = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$ и $B = (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots)$. Тогда

- ▶ $A + B \stackrel{\text{def}}{=} (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_k + b_k, \dots);$
- ▶ $A \cdot B \stackrel{\text{def}}{=} (c_0, c_1, \dots, c_k, \dots)$, где $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$.
- Кольцо формальных степенных рядов над K обозначается $K[[x]]$, где x — **формальная переменная**.
- Для элемента $A = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots) \in K[[x]]$ мы будем использовать обозначения $A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots$ или $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$.
- ▶ Также мы будем использовать обозначение $A(0) \stackrel{\text{def}}{=} a_0$.

Кольцо формальных степенных рядов: замечания

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Пастор

Замечание

- Очевидно, что в приведенных выше обозначениях выполняются равенства $(A + B)(0) = A(0) + B(0)$ и $(AB)(0) = A(0)B(0)$.
- Определение кольца формальных степенных рядов очень похоже на определение кольца многочленов. Единственным отличием является то, что в определении кольца формальных степенных рядов отсутствует требование конечности числа ненулевых коэффициентов.
 - ▶ То есть $K[x] \subset K[[x]]$ и при этом сложение и умножение в этих кольцах осуществляются по одним и тем же формулам. Это означает, что кольцо $K[x]$ является **подкольцом** кольца $K[[x]]$. (Но для того, чтобы говорить об этом строго, нам еще нужно доказать то, что $K[[x]]$ — кольцо.)
- В основном, мы будем рассматривать кольцо $\mathbb{R}[[x]]$. Элементы этого кольца можно рассматривать как степенные ряды в \mathbb{R} и, в частности, говорить об их сходимости при тех или иных значениях x . Можно доказать, что если оба ряда $A(x)$ и $B(x)$ абсолютно сходятся при некотором x , то определенные выше ряды для $(A + B)(x)$ и $(AB)(x)$ также сходятся при том же x и их пределы равны $A(x) + B(x)$ и $A(x)B(x)$ соответственно.

Кольцо формальных степенных рядов: доказательство

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

Теорема

Пусть K — коммутативное кольцо. Тогда $K[[x]]$ — тоже коммутативное кольцо. Если при этом K — кольцо с единицей, то $K[[x]]$ — тоже с единицей.

Доказательство. В целом аналогично доказательству для $K[x]$.

- Поскольку сложение формальных степенных рядов осуществляется по коэффициентно, все свойства сложения (коммутативность, ассоциативность, существование нейтрального и обратного элементов) непосредственно следуют из аналогичных свойств в кольце K .

- Коммутативность умножения.** Пусть $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$,
 $B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$, $(AB)(x) = \sum_{k \geq 0} d_k x^k$ и $(BA)(x) = \sum_{k \geq 0} d'_k x^k$.
Тогда $d_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{j=0}^k b_j a_{k-j} = d'_k$.

- Дистрибутивность.** Пусть $C(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^k$, $(AC)(x) = \sum_{k \geq 0} e_k x^k$ и
 $(A(B + C))(x) = \sum_{k \geq 0} f_k x^k$.

Тогда $f_k = \sum_{i=0}^k a_i (b_{k-i} + c_{k-i}) = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} + \sum_{i=0}^k a_i c_{k-i} = d_k + e_k$.

А. В. Паstor

Кольцо формальных степенных рядов: доказательство

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Пастор

- Ассоциативность умножения. Пусть $((AB)C)(x) = \sum_{k \geq 0} g_k x^k$.
- Тогда

$$g_s = \sum_{i=0}^s d_i c_{s-i} = \sum_{i=0}^s \left(\sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) c_{s-i} = \sum_{i+j+k=s} a_i b_j c_k.$$

Аналогично доказывается, что коэффициент при x^s ряда $(A(BC))$ равен тому же числу. Следовательно, $(A(BC)) = ((AB)C)$.

- Единичный элемент. Если существует $1 \in K$, то легко видеть, что единичным элементом в $K[[x]]$ будет формальный степенной ряд, соответствующий последовательности $(1, 0, 0, \dots)$. □

- Итак, формальные степенные ряды можно складывать, вычитать и умножать. А можно ли их делить?
- Можно. Но не всегда.

Обратимые элементы кольца $K[[x]]$

- Напомним, что элемент $a \in K$ (где K — кольцо с единицей) называется *обратимым*, если существует такой элемент $b \in K$, что $ab = ba = 1$. В этом случае, элемент b называется *обратным* к элементу a и обозначается a^{-1} .
- В курсе алгебры доказывалось, что для любого элемента кольца существует не более одного обратного.
- Множество всех обратимых элементов кольца K обозначается через K^* .

Теорема

Формальный степенной ряд $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ является обратимым элементом кольца $K[[x]]$ если и только если $a_0 \in K^*$.

Доказательство. “ \Rightarrow ”: Пусть $B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$ — обратный элемент к $A(x)$.

- Тогда $a_0 b_0 = 1$, следовательно, $a_0 \in K^*$.

“ \Leftarrow ”: Пусть $a_0 \in K^*$.

- Будем последовательно вычислять коэффициенты b_i формального степенного ряда $B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$, обратного к $A(x)$.

Обратимые элементы кольца $K[[x]]$

- Должны выполняться соотношения

- ▶ $a_0 b_0 = 1;$
- ▶ $\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = 0$, при $k > 0$.

- Тогда положим $b_0 \stackrel{\text{def}}{=} a_0^{-1}$;
- при $k > 0$ вычисляем b_k по формуле $b_k = a_0^{-1}(-\sum_{i=1}^k a_i b_{k-i})$. □

Следствие

Пусть K — поле. Тогда формальный степенной ряд $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ является обратимым элементом кольца $K[[x]]$ если и только если $a_0 \neq 0$.

Пример

- Пусть $A(x) = 1 - x$.
- Тогда легко видеть, что $A^{-1}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$
- То есть формула $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$, известная как сумма геометрической прогрессии, является верным равенством и для формальных степенных рядов.

Производящая функция для чисел Фибоначчи

- Напомним, что последовательность чисел Фибоначчи задается соотношениями $F_0 = 0, F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, при $n > 1$.

Теорема

Производящая функция для чисел Фибоначчи имеет вид $F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$.

Доказательство. Пусть $F(x) = \sum_{k \geq 0} F_k x^k$.

- Тогда $xF(x) = \sum_{k \geq 0} F_k x^{k+1} = \sum_{k \geq 1} F_{k-1} x^k$.
- Аналогично, $x^2 F(x) = \sum_{k \geq 0} F_k x^{k+2} = \sum_{k \geq 2} F_{k-2} x^k$.
- Тогда

$$\begin{aligned} xF(x) + x^2 F(x) &= F_0 \cdot x + \sum_{k \geq 2} F_{k-1} x^k + \sum_{k \geq 2} F_{k-2} x^k = \\ &= \sum_{k \geq 2} (F_{k-1} + F_{k-2}) x^k = \sum_{k \geq 2} F_k x^k = F(x) - x. \end{aligned}$$

- Следовательно, $x = F(x) - xF(x) - x^2 F(x) = (1 - x - x^2)F(x)$,
- откуда $F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$. □

Формула для чисел Фибоначчи

Следствие (Формула Бине)

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right).$$

Доказательство.

- Заметим, что числа $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ являются корнями квадратного уравнения $t^2 - t - 1 = 0$. Следовательно, $t^2 - t - 1 = (t - \varphi)(t - \varphi')$.
- Подставив $t = \frac{1}{x}$ и домножив на x^2 получим

$$1 - x - x^2 = x^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 \right) = x^2 \left(\frac{1}{x} - \varphi \right) \left(\frac{1}{x} - \varphi' \right) = (1 - \varphi x)(1 - \varphi' x).$$

- Тогда $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\varphi-\varphi'} \left(\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1-\varphi' x} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1-\varphi' x} \right) =$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{k \geq 0} (\varphi x)^k - \sum_{k \geq 0} (\varphi' x)^k \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^k - \varphi'^k) x^k.$$

- Таким образом, $F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right)$. □

Производящая функция для чисел Каталана

Теорема

Производящая функция для чисел Каталана имеет вид $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$.

Доказательство. Пусть $C(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^k$.

- Отметим, что $c_k \leq C_{2k}^k \leq 4^k$ при всех $k \geq 0$. Поэтому ряд для $C(x)$ сходится при $|x| < \frac{1}{4}$ и дает в пределе непрерывную функцию на $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.
- Тогда $C^2(x) = \left(\sum_{k \geq 0} c_k x^k \right)^2 = \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{i=0}^k c_i c_{k-i} \right) x^k = \sum_{k \geq 0} c_{k+1} x^k = \frac{C(x) - 1}{x}$.
- Преобразовав, получим
 - ▶ $4x^2 C^2(x) = 4xC(x) - 4x$;
 - ▶ $(2xC(x) - 1)^2 = 1 - 4x$;
 - ▶ $2xC(x) - 1 = \pm\sqrt{1 - 4x}$;
 - ▶ подставив $x = 0$ убеждаемся, что в правой части должен стоять минус.
- Таким образом, $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$. □

Производящая функция для чисел Каталана

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Паствор

Следствие

$$c_k = \frac{C_{2k}^k}{k+1}.$$

Доказательство. Разложим $\sqrt{1 - 4x}$ по формуле Тейлора.

- $\sqrt{1 - 4x} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4x)^k$, где $\binom{a}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}$.
- $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = -\frac{1}{2x} \sum_{k \geq 1} \binom{1/2}{k} (-4x)^k = -\frac{1}{2x} \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k+1} (-4x)^{k+1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{1/2}{k+1} 2^{2k+1} x^k.$
- $c_k = (-1)^k \binom{1/2}{k+1} 2^{2k+1} = \frac{(-1)^k (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \dots (-\frac{2k-1}{2}) \cdot 2^{2k+1}}{(k+1)!} = \frac{(2k-1)!! \cdot 2^k}{(k+1)!} = \frac{(2k-1)!! \cdot k! \cdot 2^k}{k!(k+1)!} = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} = \frac{C_{2k}^k}{k+1}.$ □

Композиция формальных степенных рядов

- Пусть $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ и $B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$ — формальные степенные ряды.
- Попытаемся подставить ряд $B(x)$ в $A(x)$. То есть будем пытаться определить *композицию* $A(B(x))$ этих двух рядов.
- Всегда ли такая композиция корректно определена? *Не всегда.*
- Попробуем определить $A(B(x)) = \sum_{k \geq 0} a_k B^k(x)$.
 - ▶ Каждое слагаемое $a_k B^k(x)$ является формальным степенным рядом.
 - ▶ Проблема в том, что получается бесконечная сумма формальных степенных рядов.
 - ▶ То есть, вычисляя коэффициент при x^n нужно будет сложить бесконечно много слагаемых.
 - ▶ Однако, если $b_0 = 0$, то ненулевые коэффициенты при x^n будут только в слагаемых $a_k B^k(x)$ при $k \leq n$. В этом случае коэффициент при x^n определяется как сумма лишь конечного числа слагаемых и мы можем формально определить $A(B(x))$ как формальный степенной ряд именно с такими коэффициентами.

Предел последовательности формальных степенных рядов

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Пастор

Сделаем то же самое более формально.

Определение

- Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, в котором нет делителей нуля, и $A_n(x) = \sum_{k \geq 0} a_{nk}x^k$ — последовательность формальных степенных рядов из $K[[x]]$.
- Формальный степенной ряд $B(x) = \sum_{k \geq 0} b_kx^k$ называется *пределом* последовательности (A_n) , если $\forall k \geq 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N (a_{nk} = b_k)$.
- Обозначения: $A_n(x) \rightarrow B(x)$ или $B(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$.

Замечание

Другими словами, для любого $k \geq 0$ последовательность (a_{nk}) коэффициентов при x^k стабилизируется: начиная с некоторого места все её члены становятся равными b_k .

Предел последовательности формальных степенных рядов: свойства

Утверждение 1

Если $A_n(x) \rightarrow B(x)$ и $A_n(x) \rightarrow C(x)$, то $B(x) = C(x)$.

Доказательство. Рассмотрим $k \geq 0$.

- По определению, найдутся такие $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, что $\forall n \geq N_1 (a_{nk} = b_k)$ и $\forall n \geq N_2 (a_{nk} = c_k)$.
- Тогда при $n = \max(N_1, N_2)$ имеем $b_k = a_{nk} = c_k$. □

Утверждение 2

Пусть $A_n(x) \rightarrow B(x)$ и $C_n(x) \rightarrow D(x)$. Тогда

- $(A_n + C_n)(x) \rightarrow (B + D)(x)$;
- $(A_n C_n)(x) \rightarrow (BD)(x)$.

Доказательство. Пусть $k \geq 0$.

- Выберем N так, чтобы $\forall i \leq k \forall n \geq N (a_{ni} = b_i \& c_{ni} = d_i)$.
- Тогда при $n \geq N$ имеем $a_{nk} + c_{nk} = b_k + d_k$ и $\sum_{i=0}^k a_{ni} c_{n,k-i} = \sum_{i=0}^k b_i d_{k-i}$. □

Дискретное нормирование в кольце $K[[x]]$

Определение

Пусть $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ — формальный степенной ряд.

- Назовем *нормой* ряда $A(x)$ величину $\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a_k \neq 0\}$.
- В случае $A(x) = 0$ положим $\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \infty$.

Утверждение 3

Определенная выше функция $\nu: K[[x]] \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, обладает следующими свойствами:

1. $\nu(A) = \infty \iff A = 0$;
2. $\nu(AB) = \nu(A) + \nu(B)$;
3. $\nu(A + B) \geq \min\{\nu(A), \nu(B)\}$.

Доказательство. Свойство 1. непосредственно следует из определения.

- Пусть $\nu(A) = m$ и $\nu(B) = n$.
- В случае, если $A = 0$ или $B = 0$, свойства 2. и 3. очевидно выполнены.

Поэтому далее мы будем считать, что $m, n < \infty$.

Дискретное нормирование в кольце $K[[x]]$

2. Пусть $(AB)(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^k$, где $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$.

- Заметим, что $a_i b_{k-i} = 0$ как при $i < m$, так и при $i > k - n$.
- Следовательно, $c_{m+n} = a_m b_n \neq 0$ и $c_k = 0$ при $k < m + n$.
- А это и означает, что $\nu(AB) = m + n$.

3. При $k < \min\{m, n\}$ очевидно, что $a_k + b_k = 0$.

- Следовательно, $\nu(A + B) \geq \min\{m, n\}$. □

Следствие

Если в кольце K нет делителей нуля, то в $K[[x]]$ также нет делителей нуля.

Замечание

- Функция с такими свойствами называется **дискретным нормированием** в кольце $K[[x]]$.
- Функция $\nu(A)$ ведет себя так же, как и степень многочлена. В некоторых книгах её называют **степенью** формального степенного ряда и обозначают $\deg(A)$. Но мы так делать не будем во избежание путаницы с обычной степенью многочлена. Все-таки формально это разные функции.

Утверждение 4

Последовательность формальных степенных рядов $A_n(x)$ имеет предел, если и только если $\lim_{i \rightarrow \infty} \nu(A_{i+1} - A_i) = \infty$.

Доказательство. “ \Rightarrow ” Пусть $A_n(x) \rightarrow B(x)$. Рассмотрим произвольное $k \in \mathbb{N}$.

- Тогда найдется такое $N_k \in \mathbb{N}$, что $\forall n \geq N_k \forall j \leq k (a_{nj} = b_j)$.
- Следовательно, при $i \geq N_k$ имеем $\forall j \leq k (a_{i+1,j} - a_{ij} = 0)$, то есть $\nu(A_{i+1} - A_i) > k$.

“ \Leftarrow ” Пусть $\lim_{i \rightarrow \infty} \nu(A_{i+1} - A_i) = \infty$. Рассмотрим произвольное $k \in \mathbb{N}_0$.

- Тогда найдется такое $N_k \in \mathbb{N}$, что $\forall i \geq N_k (\nu(A_{i+1} - A_i) > k)$.
- Следовательно, при $\forall i \geq N_k (a_{ik} = a_{N_k k})$.
- Тогда, обозначив $b_k \stackrel{\text{def}}{=} a_{N_k k}$, получим, что $A_n(x) \rightarrow \sum_{k \geq 0} b_k x^k$. □

Замечание о расстояниях между формальными степенными рядами

Замечание

- Фактически, мы считаем, что два формальных степенных ряда тем ближе, чем больше норма их разности. Другими словами, ряды тем ближе, чем позже наступает первое различие в их коэффициентах.
- Формально это можно задать введя следующую *функцию расстояния* в кольце $K[[x]]$:

$$\rho(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-\nu(A-B)}.$$

- Тогда $A_n(x) \rightarrow B(x)$ если и только если $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n, B) = 0$.
- Можно проверить, что для заданной таким образом функции расстояния выполнены основные свойства обычного расстояния между точками.

В частности, выполнено *неравенство треугольника*:

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C).$$

- Такая функция расстояния задает на $K[[x]]$ структуру *метрического пространства*. Но подробно о метрических пространствах мы говорить не будем.

Бесконечные суммы и произведения формальных степенных рядов

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Паствор

Определение

- Пусть $A_i(x)$ — последовательность формальных степенных рядов.
- Тогда обозначим

$$\blacktriangleright \sum_{i \geq 0} A_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n A_i(x);$$

$$\blacktriangleright \prod_{i \geq 0} A_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n A_i(x).$$

- Будем говорить, что бесконечная сумма или бесконечное произведение **сходится**, если указанный в определении предел существует.

Замечание

- Тем самым, мы можем рассматривать формальный степенной ряд $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ как бесконечную сумму своих одночленов $a_k x^k$.
- Для простоты, говоря о бесконечных произведениях, мы далее будем ограничиваться случаем, когда у всех множителей свободные члены равны 1.

Сходимость бесконечных сумм и произведений

Теорема

1. $\sum_{i \geq 0} A_i(x)$ сходится, если и только если $\lim_{i \rightarrow \infty} \nu(A_i) = \infty$;
2. $\prod_{i \geq 0} (1 + B_i(x))$, где $\forall i \nu(B_i) > 0$, сходится,
если и только если $\lim_{i \rightarrow \infty} \nu(B_i) = \infty$.

Доказательство.

1. По утверждению 4 сходимость суммы равносильна тому, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu \left(\sum_{i=0}^{n+1} A_i(x) - \sum_{i=0}^n A_i(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) = \infty.$$

2. Аналогично, сходимость произведения равносильна тому, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \nu \left(\prod_{i=0}^{n+1} (1 + B_i(x)) - \prod_{i=0}^n (1 + B_i(x)) \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu \left(\prod_{i=0}^n (1 + B_i(x)) B_{n+1}(x) \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n \nu(1 + B_i(x)) + \nu(B_{n+1}(x)) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(B_n) = \infty. \end{aligned}$$

Еще о композиции формальных степенных рядов

Теперь мы можем дать формальное определение композиции формальных степенных рядов. Пусть $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ и $B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$ — формальные степенные ряды.

Определение

- $A(B(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} a_k B^k(x)$ — **композиция** рядов A и B .
- Композиция определена, если и только если указанная выше бесконечная сумма сходится.

Поймем, при каких условиях $A(B(x))$ определена. Есть два случая.

- 1° Тривиальный случай: если $A(x)$ — многочлен (т. е. начиная с некоторого места все $a_i = 0$). Тогда в бесконечной сумме лишь конечное число ненулевых слагаемых. Очевидно, что тогда она сходится.
 - 2° Если $\nu(B) > 0$ (т. е. у $B(x)$ нулевой свободный член), то $\nu(a_k B^k(x)) = \nu(a_k) + k\nu(B(x)) \geq k\nu(B(x)) \rightarrow +\infty$ и бесконечная сумма также сходится.
- Докажем, что в остальных случаях композиция не определена.

Еще о композиции формальных степенных рядов

Теорема

Композиция $A(B(x))$ определена тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих двух утверждений.

- 1° $A(x)$ — многочлен (т. е. начиная с некоторого места все $a_k = 0$);
- 2° $\nu(A) > 0$.

Доказательство. “ \Leftarrow ”: доказано выше.

“ \Rightarrow ”: Пусть $A(B(x))$ определена и при этом $\nu(A) = 0$.

- Тогда, $\nu(a_k B^k(x)) = \nu(a_k) + k\nu(B(x)) = \nu(a_k) \rightarrow \infty$.
- Но тогда начиная с некоторого места все $a_k = 0$. □

Примеры

1. Подставим в равенство $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ ряд x^n .

Получим равенство $\frac{1}{1-x^n} = 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots$

2. Введем обозначение $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$. Тогда выражение $e^{e^x - 1}$ определено как формальный степенной ряд. А выражение e^{x+1} — не определено!

Производящая функция числа разбиений

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Пастор

Теорема

$$\sum_{n \geq 0} p(n)x^n = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k}.$$

Доказательство.

- $\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k} = (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^4+x^6+\dots)\dots$
- Заметим, что коэффициент при x^n получается при перемножении первых n скобок этого бесконечного произведения.
- Для того, чтобы в произведении $\prod_{k=1}^n (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\dots)$ получить слагаемое x^n , нам нужно перемножить слагаемые вида $x^{t_k k}$ из каждой скобки (где $t_k \in \mathbb{N}_0$).
- То есть коэффициент при x^n равен числу решений уравнения $t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \dots + nt_n = n$ в целых неотрицательных числах, а оно равно $p(n)$. □
- Многие утверждения о количествах разбиений можно доказать при помощи производящих функций.
- В качестве примера, рассмотрим одну из задач из серии про разбиения.

Производящая функция числа разбиений

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Пастор

Утверждение

Количество представлений натурального числа p в виде суммы различных натуральных слагаемых равно количеству его представлений в виде суммы нечетных, не обязательно различных слагаемых.

Доказательство. Аналогично доказанному выше можно получить, что

- производящая функция для числа разбиений на нечетные слагаемые равна $\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k}$;
- производящая функция для числа разбиений на различные слагаемые равна $\prod_{k \geq 1} (1+x^k)$.
- Докажем, что они равны. Для этого заметим, что $\frac{1}{1-x^k} = \prod_{\ell \geq 0} (1+x^{k2^\ell})$.
 - ▶ Действительно, докажем, что $(1-x^k) \prod_{\ell=0}^{m-1} (1+x^{k2^\ell}) = 1 - x^{k2^m}$.
 - ▶ $m=1$: $(1-x^k)(1+x^k) = 1 - x^{2k}$;
 - ▶ $m \rightarrow m+1$: $(1-x^k) \prod_{\ell=0}^m (1+x^{k2^\ell}) = (1-x^{k2^m})(1+x^{k2^m}) = 1 - x^{k2^{m+1}}$.
 - Перемножив полученные равенства по всем $k \not\equiv 2$, получим требуемое. □

Формальная производная

Определение

- Пусть $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ — формальный степенной ряд.
- *Формальной производной* ряда $A(x)$ называется формальный степенной ряд

$$A'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}.$$

- Наша цель состоит в том, чтобы проверить, что формальная производная обладает теми же свойствами, что и обычная производная функции.
- Для этого мы дадим эквивалентную переформулировку определения формальной производной, сделав его более похожим на классическое определение производной.
- Разложим выражение $A(x + t)$ по степеням t . Оказывается, что коэффициент при t^1 равен как раз $A'(x)$.
 - ▶ Здесь мы рассматриваем $A(x + t)$ как *формальный степенной ряд от двух переменных*, x и t .

Формальные степенные ряды от двух переменных

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Пастор

- Пусть K — коммутативное кольцо с единицей.
- Мы доказывали, что тогда $K[[x]]$ — также коммутативное кольцо с единицей.
 - ▶ И если в кольце K нет делителей нуля, то в $K[[x]]$ их также нет.
- Следовательно, мы можем рассмотреть кольцо формальных степенных рядов с коэффициентами из $K[[x]]$.

Определение

- Кольцо $K[[x, t]] \stackrel{\text{def}}{=} (K[[x]])[[t]]$ называется *кольцом формальных степенных рядов от двух переменных*.

Замечание

- Формально, элемент кольца $K[[x, t]]$ — это “последовательность последовательностей” элементов кольца K , т. е. бесконечная двумерная матрица $F = (f_{k\ell})_{k,\ell=0}^{\infty}$, где $f_{k\ell} \in K$.
- Эти элементы записывают как формальные суммы вида $F(x, t) = \sum_{k,\ell \geq 0} f_{k\ell} x^k t^\ell$.

Формальная производная и ряды от двух переменных

- Пусть $F(x, t) = \sum_{k, \ell \geq 0} f_{k\ell} x^k t^\ell$ и $G(x, t) = \sum_{k, \ell \geq 0} g_{k\ell} x^k t^\ell$. Тогда легко видеть, что их сумма и произведение задаются следующими формулами:
 - $(F + G)(x, t) = \sum_{k, \ell \geq 0} (f_{k\ell} + g_{k\ell}) x^k t^\ell;$
 - $(F \cdot G)(x, t) = \sum_{k, \ell \geq 0} h_{k\ell} x^k t^\ell$, где $h_{k\ell} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^\ell f_{ij} g_{k-i, \ell-j}$.
- По доказанному выше, $K[[x, t]]$ — коммутативное кольцо с единицей.
- Более того, если в кольце K нет делителей нуля, то в кольце $K[[x, t]]$ также нет делителей нуля.
- Аналогично можно определить $K[[x_1, \dots, x_n]]$ — *кольцо формальных степенных рядов от n переменных*.

Лемма

$$A(x + t) = A(x) + A'(x)t + U(x, t)t^2, \text{ где } U(x, t) \in K[[x, t]].$$

Доказательство. Пусть $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$. Тогда

$$\begin{aligned} A(x + t) &= \sum_{k \geq 0} a_k (x + t)^k = \sum_{k \geq 0} a_k (x^k + kx^{k-1}t + \sum_{i=2}^k C_k^i x^{k-i} t^i) = \\ &= \sum_{k \geq 0} a_k x^k + (\sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}) t + (\sum_{k \geq 2} \sum_{i=2}^k a_k C_k^i x^{k-i} t^{i-2}) t^2. \end{aligned}$$



Свойства формальной производной

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Пастор

Следствие

$$A'(x) = \left. \frac{A(x+t) - A(x)}{t} \right|_{t=0}.$$

Теорема

1. $(A + B)'(x) = A'(x) + B'(x);$
2. $(AB)'(x) = A'(x)B(x) + A(x)B'(x);$
3. $\left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)' = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)};$
4. $(A(B(x)))' = A'(B(x))B'(x).$

Доказательство. Пусть

$$A(x+t) = A(x) + A'(x)t + U(x, t)t^2 \text{ и } B(x+t) = B(x) + B'(x)t + V(x, t)t^2.$$

Тогда

1. $(A + B)(x + t) = (A + B)(x) + (A'(x) + B'(x))t + (U(x, t) + V(x, t))t^2;$

Свойства формальной производной

$$2. (AB)(x+t) = (A(x) + A'(x)t + U(x, t)t^2)(B(x) + B'(x)t + V(x, t)t^2) = \\ = (AB)(x) + (A'(x)B(x) + A(x)B'(x))t + W(x, t)t^2;$$

$$3. A(x) = \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right) B(x) \Rightarrow A'(x) = \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)' B(x) + \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right) B'(x) \\ \Rightarrow \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)' = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)}.$$

$$4. \text{ Пусть } T(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} B(x+t) - B(x) = t(B'(x) + V(x, t)t).$$

- Отметим, что ряды $B(x)$ и $T(x, t)$ имеют нулевые свободные члены. Так что их можно подставить в выражение для $A(x+t)$ вместо x и t соответственно.

- Тогда

$$A(B(x+t)) = A(B(x) + T(x, t)) = \\ = A(B(x)) + A'(B(x))T(x, t) + U(B(x), T(x, t))T^2(x, t) = \\ = A(B(x)) + A'(B(x))B'(x)t + \\ + (A'(B(x))V(x, t) + U(B(x), T(x, t))(B'(x) + V(x, t)t)^2)t^2.$$



Формальная производная: примеры

Здесь и далее мы будем рассматривать кольцо $\mathbb{R}[[x]]$.

1. Очевидно, что $A'(x) = 0 \iff A(x) = a_0 \in \mathbb{R}$.
 - Более того, если $A'(x) = B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$,
то $A(x) = a_0 + \sum_{k \geq 0} \frac{b_k}{k+1} x^{k+1}$.
2. Как и раньше, пусть $e^x = \exp(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$. Тогда $\exp'(x) = \exp(x)$.
 - Более того, если $A'(x) = A(x)$, то $A(x) = a_0 \exp(x)$.
 - Действительно, если $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$, то приравняв коэффициенты
при x^{k-1} в равенстве $A'(x) = A(x)$ получим $a_{k-1} = k a_k$, откуда $a_k = \frac{a_0}{k!}$.
3. Введем также обозначение $\ln(1+x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.
Тогда $\ln(1+x)' = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1}{1+x}$.
4. Пусть $B(x)$ — формальный степенной ряд, такой, что $B(0) = 1$.
Тогда мы можем определить **логарифм** этого ряда как композицию
двух формальных степенных рядов: $\ln B(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln(1 + (B(x) - 1))$.
 - Заметим, что тогда $(\ln B(x))' = \frac{B'(x)}{B(x)}$.

Логарифмическая производная и её свойства

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Пастор

Определение

Формальный степенной ряд $\frac{B'(x)}{B(x)}$ называется *логарифмической производной* ряда $B(x)$ (где $B(0) = 1$).

Лемма

Пусть $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ таковы, что $A(0) = B(0) = 1$ и $\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{B'(x)}{B(x)}$.

Тогда $A(x) = B(x)$.

Доказательство.

$$0 = \frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{A(x)B(x)} = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)} \frac{B(x)}{A(x)} = \left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)' \cdot \frac{B(x)}{A(x)}.$$

- Следовательно, $\left(\frac{A(x)}{B(x)} \right)' = 0$, то есть $\frac{A(x)}{B(x)}$ — константа.
- Поскольку $A(0) = B(0) = 1$, получаем, что $A(x) = B(x)$. □

Следствие

Если $\ln A(x) = \ln B(x)$, то $A(x) = B(x)$.

Теорема

Пусть $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ таковы, что $A(0) = 0, B(0) = 1$ и $\frac{B'(x)}{B(x)} = A'(x)$.

Тогда $B(x) = \exp(A(x))$.

Доказательство.

- $\frac{(\exp(A(x)))'}{\exp(A(x))} = \frac{\exp(A(x))A'(x)}{\exp(A(x))} = A'(x) = \frac{B'(x)}{B(x)}$.
- Тогда по лемме $B(x) = \exp(A(x))$. □

Замечание

- Мы видели, что если $A(0) = 0$, то можно рассмотреть экспоненту $\exp(A(x))$. При этом, $\exp(A(0)) = 1$.
- А если $B(0) = 1$, то можно рассмотреть логарифм $\ln(B(x))$. И тогда $\ln(B(0)) = 0$.
- Как и для чисел, эти две операции оказываются взаимно обратными.

Теорема

Пусть $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ таковы, что $A(0) = 0$ и $B(0) = 1$. Тогда

1. $\ln(\exp(A(x))) = A(x);$
2. $\exp(\ln(B(x))) = B(x).$

Доказательство.

$$1. (\ln(\exp(A(x))))' = \frac{(\exp(A(x)))'}{\exp(A(x))} = \frac{\exp(A(x))A'(x)}{\exp(A(x))} = A'(x).$$
$$2. \frac{(\exp(\ln(B(x))))'}{\exp(\ln(B(x)))} = \frac{\exp(\ln(B(x)))(\ln(B(x)))'}{\exp(\ln(B(x)))} = \frac{B'(x)}{B(x)}.$$

□

- Другие привычные нам свойства экспоненты и логарифма здесь также выполнены.

Логарифмирование и экспоненцирование степенных рядов

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Паствор

Теорема

Пусть $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ таковы, что $A(0) = B(0) = 1$. Тогда
 $\ln(A(x)B(x)) = \ln A(x) + \ln B(x)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\ln(A(x)B(x)))' &= \frac{(A(x)B(x))'}{A(x)B(x)} = \frac{A'(x)B(x) + A(x)B'(x)}{A(x)B(x)} = \\&= \frac{A'(x)}{A(x)} + \frac{B'(x)}{B(x)} = (\ln A(x) + \ln B(x))'.\end{aligned}$$

□

Следствие

Пусть $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ таковы, что $A(0) = B(0) = 0$. Тогда
 $\exp(A(x) + B(x)) = \exp A(x) \exp B(x)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\ln(\exp(A(x) + B(x))) &= A(x) + B(x) = \\&= \ln(\exp A(x)) + \ln(\exp B(x)) = \ln(\exp A(x) \exp B(x)).\end{aligned}$$

□

Экспоненциальные производящие функции

- Пусть (a_0, a_1, a_2, \dots) — произвольная последовательность чисел.
- Экспоненциальной производящей функцией последовательности (a_n) называется выражение

$$A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

Пример

- Найдем экспоненциальную производящую функцию последовательности a_n , заданной следующими соотношениями:
 $a_0 = a_1 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + (n - 1)a_{n-2}$ при $n \geq 2$.
- Пусть $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k \frac{x^k}{k!}$.
- Тогда $A'(x) = \sum_{k \geq 1} a_k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + \sum_{k \geq 2} (a_{k-1} + (k-1)a_{k-2}) \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k \geq 1} a_{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k \geq 2} a_{k-2} \frac{x^{k-1}}{(k-2)!} = A(x) + xA(x)$.
- Следовательно, $\frac{A'(x)}{A(x)} = 1 + x = (x + \frac{x^2}{2})'$.
- Таким образом, $A(x) = \exp(x + \frac{x^2}{2})$.

Экспоненциальные производящие функции для чисел Стирлинга

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Паствор

Теорема

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k, \text{ при всех } k \geq 0.$$

Доказательство. Индукция по k .

$k = 0$: $\sum_{n \geq 0} S(n, 0) \frac{x^n}{n!} = 1 = \frac{1}{0!} (e^x - 1)^0.$

$k - 1 \rightarrow k$: Пусть $F_k(x) = \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^n}{n!}$.

- $F_k(x) = \sum_{n \geq k} (kS(n-1, k) + S(n-1, k-1)) \frac{x^n}{n!} =$
 $= k \sum_{n \geq k} S(n-1, k) \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \geq k} S(n-1, k-1) \frac{x^n}{n!}.$

- $F'_k(x) = k \sum_{n \geq k} S(n-1, k) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n \geq k} S(n-1, k-1) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} =$
 $= kF_k(x) + F_{k-1}(x).$

- По индукционному предположению имеем $F_{k-1}(x) = \frac{1}{(k-1)!} (e^x - 1)^{k-1}$,
следовательно,

$$F'_k(x) = kF_k(x) + \frac{1}{(k-1)!} (e^x - 1)^{k-1}. \quad (1)$$

- Также мы знаем, что $F_k(0) = 0$. (2)

Экспоненциальные производящие функции чисел Стирлинга и Белла

- Заметим, что решение $F_k(x) = \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k$ подходит под оба условия:

$$\left(\frac{1}{k!}(e^x - 1)^k\right)' = \frac{1}{(k-1)!}(e^x - 1)^{k-1}e^x = k\frac{1}{k!}(e^x - 1)^k + \frac{1}{(k-1)!}(e^x - 1)^{k-1}$$

и условие (2) также, очевидно, выполнено.

- Докажем, что $F_k(x)$ — единственный формальный степенной ряд, удовлетворяющий этим условиям.

- Пусть $G_k(x)$ удовлетворяет условиям (1) и (2). $H_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} G_k(x) - F_k(x)$.
- По условию (1) имеем $H'_k(x) = G'_k(x) - F'_k(x) = kG_k(x) - kF_k(x) = kH_k(x)$.
- С другой стороны, по условию (2) имеем $H_k(0) = G_k(0) - F_k(0) = 0$.
- Но тогда $H_k(x) = 0$ (в противном случае, $\nu(H'_k) = \nu(H_k) - 1 \neq \nu(kH_k(x))$).
- Таким образом, $G_k(x) = F_k(x)$. □

Следствие

$$\sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}.$$

Доказательство. $\sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k = e^{e^x - 1}$. □

Определение

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

- $(1 + x)^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha \ln(1 + x));$
- если $A(x) \in \mathbb{R}[[x]]$ и $A(0) = 1$, то $(A(x))^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha \ln(A(x))).$

Докажем, что определенная выше операция введения в степень формального степенного ряда обладает всеми привычными свойствами введения в степень.

Утверждение

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $A, B \in \mathbb{R}[[x]]$, где $A(0) = B(0) = 1$. Тогда

1. $(A(x))^\alpha (A(x))^\beta = (A(x))^{\alpha+\beta};$
2. $((A(x))^\alpha)^\beta = (A(x))^{\alpha\beta};$
3. $(A(x))^\alpha (B(x))^\alpha = (A(x)B(x))^\alpha.$

Формальное возвведение в степень

Доказательство.

$$\begin{aligned}1. \quad (A(x))^\alpha (A(x))^\beta &= \exp(\alpha \ln(A(x))) \exp(\beta \ln(A(x))) = \\&= \exp(\alpha \ln(A(x)) + \beta \ln(A(x))) = \\&= \exp((\alpha + \beta) \ln(A(x))) = \\&= (A(x))^{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. \quad ((A(x))^\alpha)^\beta &= \exp(\beta \ln(A(x)^\alpha)) = \\&= \exp(\beta \ln(\exp(\alpha \ln(A(x))))) = \\&= \exp(\beta(\alpha \ln(A(x)))) = \\&= (A(x))^{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3. \quad (A(x))^\alpha (B(x))^\alpha &= \exp(\alpha \ln(A(x))) \exp(\alpha \ln(B(x))) = \\&= \exp(\alpha \ln(A(x)) + \alpha \ln(b(x))) = \\&= \exp(\alpha(\ln(A(x)) + \ln(B(x)))) = \\&= \exp(\alpha \ln(A(x)B(x))) = \\&= (A(x)B(x))^\alpha.\end{aligned}$$



Замечание

Отметим еще несколько свойств, характерных для обычного введения в степень. Пусть $A \in \mathbb{R}[[x]]$ и $A(0) = 1$. Тогда

- $A(x)^0 = \exp(0 \cdot \ln A(x)) = \exp(0) = 1$;
- $A(x)^1 = \exp(1 \cdot \ln A(x)) = \exp(\ln A(x)) = A(x)$;
- если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $A(x)^{\alpha+1} = A(x)^\alpha A(x)^1 = A(x)^\alpha \cdot A(x)$,
 - ▶ в частности, при $n \in \mathbb{N}$ по индукции легко показать, что $A(x)^n$ — это действительно n -я степень ряда $A(x)$;
- $A(x)^{-1} \cdot A(x) = A(x)^0 = 1$,
 - ▶ то есть $A(x)^{-1}$ — это действительно ряд, обратный к $A(x)$;
- $(A(x)^{\frac{1}{n}})^n = A(x)^{\frac{1}{n} \cdot n} = A(x)^1 = A(x)$,
 - ▶ то есть мы можем считать, что $\sqrt[n]{A(x)} \stackrel{\text{def}}{=} A(x)^{\frac{1}{n}}$.

Биномиальный ряд

Теорема

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k$, где $\binom{\alpha}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$.

Доказательство. Пусть $(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$. Мы знаем, что $a_0 = 1$.

- Заметим, что $\frac{((1+x)^\alpha)'}{(1+x)^\alpha} = (\ln((1+x)^\alpha))' = (\alpha \ln(1+x))' = \frac{\alpha}{1+x}$.
- Тогда $(1+x)((1+x)^\alpha)' = \alpha(1+x)^\alpha$. При этом, $\alpha(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \alpha a_k x^k$ и $(1+x)((1+x)^\alpha)' = (1+x) \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1} = \sum_{k \geq 0} ((k+1)a_{k+1} + k a_k)x^k$.
- Приравнивая коэффициенты при x^k получим, что $\alpha a_k = (k+1)a_{k+1} + k a_k$ при всех $k \geq 0$, откуда $a_{k+1} = \frac{\alpha - k}{k+1} \cdot a_k$.
- Тогда, учитывая, что $a_0 = 1$, по индукции получаем, что $a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$. □

Замечание

- Доказанная выше формула для $(1+x)^\alpha$ называется **биномиальным рядом**.
- В частности, эта теорема означает, что равенство $\sqrt{1-4x} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4x)^k$, которое мы использовали для чисел Каталана, имеет смысл и с точки зрения формальных степенных рядов.

Многомерные производящая функции

- Если комбинаторная величина задается несколькими целыми неотрицательными параметрами (индексами), то для её задания удобно использовать *производящую функцию нескольких переменных* или *многомерную* производящую функцию.
- Пусть $a: \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$. *Многомерной производящей функцией* величины $a(i_1, \dots, i_n)$ называется выражение

$$A(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} a(i_1, \dots, i_n) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

- Многомерную производящую функцию можно рассматривать как формальный степенной ряд от нескольких переменных (т. е. как элемент кольца $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$).
- Также можно говорить о сходимости такого ряда в некоторой окрестности нуля. Тогда получится функция от n переменных, действующая из некоторого подмножества \mathbb{R}^n в \mathbb{R} .

Многомерные производящая функции: примеры

1. Двумерная производящая функция для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{n,k \geq 0} C_n^k x^k y^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^k \right) y^n = \sum_{n \geq 0} (1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-x}.$$

2. Симметричная форма записи биномиальных коэффициентов

$$\sum_{m,n \geq 0} C_{m+n}^m x^m y^n = \sum_{k \geq 0} \sum_{m+n=k} C_{m+n}^m x^m y^n = \sum_{k \geq 0} (x+y)^k = \frac{1}{1-x-y}.$$

3. Разбиения целочисленных векторов

- Пусть $N(a, b)$, где $a, b \in \mathbb{N}_0$, — число разбиений вектора $(a, b) \in \mathbb{N}_0^2$ на различные векторы, координаты которых отличаются на 1.
- Например, $(6, 4) = (1, 0) + (5, 4)$;
 $(6, 4) = (2, 1) + (4, 3)$;
 $(6, 4) = (0, 1) + (1, 0) + (2, 1) + (3, 2)$.
- Следовательно, $N(6, 4) = 3$.
- Тогда $\sum_{a,b \geq 0} N(a, b) u^a v^b = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + u^{k-1} v^k)(1 + u^k v^{k-1})$.

Доказательство. $N(a, b)$ — число способов представить $u^a v^b$ в виде произведения различных мономов вида $u^{k-1} v^k$ и $u^k v^{k-1}$. А это и есть коэффициент при $u^a v^b$ в правой части. □

Теорема (тождество Гаусса-Якоби)

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u^{k-1} v^k)(1 + u^k v^{k-1})(1 - u^k v^k) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} u^{\frac{q(q+1)}{2}} v^{\frac{q(q-1)}{2}}.$$

- Ниже мы дадим комбинаторное доказательство тождества Гаусса-Якоби.
- Для этого изучим свойства чисел $N(a, b)$.
- Каждое разбиение вектора (a, b) будем записывать в следующем виде:

$$(a, b) = (k_1 + 1, k_1) + \dots + (k_s + 1, k_s) + (\ell_1, \ell_1 + 1) + \dots + (\ell_t, \ell_t + 1),$$

где $k_1 > \dots > k_s \geq 0$ и $\ell_1 > \dots > \ell_t \geq 0$.

- Такое разбиение будем обозначать через $(k_1, \dots, k_s | \ell_1, \dots, \ell_t)$.
- Например, разбиения вектора $(6, 4)$ обозначим $(4, 0|), (3, 1|), (2, 1, 0|0)$.
- Докажем несколько лемм.

Свойства разбиений целочисленных векторов

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Пастор

Лемма 1

$$N(a, b) > 0 \iff a + b \geq (a - b)^2.$$

Доказательство. Пусть, не умаляя общности, $a \geq b$.

“ \Rightarrow ”: Рассмотрим разбиение $(k_1, \dots, k_s | \ell_1, \dots, \ell_t)$ вектора (a, b) .

- Очевидно, что $a - b = s - t \geq 0$.
- $a + b = (2k_1 + 1) + \dots + (2k_s + 1) + (2\ell_1 + 1) + \dots + (2\ell_t + 1) \geq 1 + 3 + \dots + (2s - 1) = s^2 \geq (s - t)^2 = (a - b)^2$.

“ \Leftarrow ”: Пусть $q = a - b$.

- Если $q = 0$, то $(a, a) = (a, a - 1) + (0, 1)$. Т. е. $(a - 1 | 0)$ — разбиение (a, b) .
- Если $q > 0$, то рассмотрим разбиение $(q - 1, q - 2, \dots, 0 |)$.
 - ▶ Это разбиение вектора (a', b') , где $a' - b' = a - b \geq 0$.
 - ▶ Заметим, что $a' + b' = 1 + 3 + \dots + (2q - 1) = q^2 \leq a + b$.
 - ▶ Тогда $a = a' + m$ и $b = b' + m$, где $m \geq 0$.
 - ▶ Следовательно, $(q - 1 + m, q - 2, \dots, 0 |)$ — разбиение (a, b) . □

Свойства разбиений целочисленных векторов

- Далее, мы будем рассматривать только векторы, для которых $N(a, b) > 0$.
- Очевидно, что число $a + b - (a - b)^2$ всегда четно.
- Введем обозначения $m = \frac{a+b-(a-b)^2}{2}$ и $q = a - b$. Тогда $m \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{Z}$.
- Заметим, что числа a и b однозначно выражаются через m и q .

Действительно

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \quad a &= \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = \frac{2m+q^2+q}{2} = m + \frac{q(q+1)}{2}; \\ \blacktriangleright \quad b &= \frac{(a+b)-(a-b)}{2} = \frac{2m+q^2-q}{2} = m + \frac{q(q-1)}{2}.\end{aligned}$$

- Введем обозначение

$$t(m, q) \stackrel{\text{def}}{=} N\left(m + \frac{q(q+1)}{2}, m + \frac{q(q-1)}{2}\right).$$

Лемма 2

При всех $m \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{Z}$ выполнено равенство $t(m, q) = t(m, 0)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что при $q > 0$ выполнено равенство $t(m, q) = t(m, q - 1)$ (при $q < 0$ все симметрично).

Свойства разбиений целочисленных векторов: зависимость только от m

- Пусть $T(m, q)$ — множество всех разбиений $(m + \frac{q(q+1)}{2}, m + \frac{q(q-1)}{2})$.
- Построим биекцию между $T(m, q)$ и $T(m, q - 1)$:

$$\varphi(k_1, \dots, k_s | \ell_1, \dots, \ell_t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (k_1 - 1, \dots, k_s - 1 | \ell_1 + 1, \dots, \ell_t + 1, 0), & k_s > 0 \\ (k_1 - 1, \dots, k_{s-1} - 1 | \ell_1 + 1, \dots, \ell_t + 1), & k_s = 0. \end{cases}$$

- Обозначим через a', b', s', t', m', q' характеристики получившегося разбиения, аналогичные a, b, s, t, m и q соответственно.
- Заметим, что в каждом из случаев $s' - t' = s - t - 1$, т. е. $q' = q - 1$.
- Также легко видеть, что во всех случаях $a' + b' = (a + b) - 2s + 2t + 1$, откуда $m' = \frac{a'+b'-(a'-b')^2}{2} = \frac{a+b-2q+1-(q-1)^2}{2} = \frac{a+b-q^2}{2} = m$.
- Наконец, φ — биекция, поскольку можно построить обратное отображение:

$$\psi(k_1, \dots, k_s | \ell_1, \dots, \ell_t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (k_1 + 1, \dots, k_s + 1, 0 | \ell_1 - 1, \dots, \ell_t - 1), & \ell_t > 0 \\ (k_1 + 1, \dots, k_s + 1 | \ell_1 - 1, \dots, \ell_{t-1} - 1), & \ell_t = 0. \end{cases}$$



Связь разбиений чисел и векторов

Лемма 3

При всех $m \in \mathbb{N}_0$ выполнено равенство $t(m, 0) = p(m)$.

Доказательство. Нужно доказать, что число разбиений вектора (m, m) равно числу разбиений m .

- Построим биекцию между этими разбиениями.
- Рассмотрим произвольную диаграмму Юнга из m клеток.
- Проведем в этой диаграмме диагональ из левого нижнего угла направо-вверх. Пусть в ней s клеток.
 - ▶ Пусть k_i — количество клеток в i -й строке, находящихся правее выделенной диагонали.
 - ▶ Аналогично, ℓ_j — количество клеток в j -м столбце, находящихся выше выделенной диагонали.
 - ▶ Тогда $(k_1, \dots, k_s | \ell_1, \dots, \ell_t)$ — разбиение вектора (m, m) .
- К этому преобразованию легко построить обратное, поэтому оно — биекция.



Доказательство тождества Гаусса-Якоби

Доказательство.

$$\begin{aligned} \prod_{k \geq 1} (1 + u^{k-1}v^k)(1 + u^k v^{k-1}) &= \sum_{a,b \geq 0} N(a,b) u^a v^b = \\ &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t(m,q) u^{m+\frac{q(q+1)}{2}} v^{m+\frac{q(q-1)}{2}} = \\ &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m \geq 0} p(m) u^m v^m \right) u^{\frac{q(q+1)}{2}} v^{\frac{q(q-1)}{2}} = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - u^k v^k} \sum_{q=-\infty}^{\infty} u^{\frac{q(q+1)}{2}} v^{\frac{q(q-1)}{2}}. \end{aligned}$$

Домножив обе части равенства на $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - u^k v^k)$ получим

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u^{k-1}v^k)(1 + u^k v^{k-1})(1 - u^k v^k) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} u^{\frac{q(q+1)}{2}} v^{\frac{q(q-1)}{2}}.$$



Доказательство пентагональной формулы Эйлера через тождество Гаусса-Якоби

Дискретная
математика.
Глава 7. Метод
производящих
функций.

А. В. Пастор

Следствие (пентагональная формула Эйлера)

$$\prod_{k \geq 1} (1 - x^k) = 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left(x^{\frac{k(3k-1)}{2}} + x^{\frac{k(3k+1)}{2}} \right).$$

Доказательство.

- Подставим в тождество Гаусса-Якоби $u = -t, v = -t^2$.
- В левой части получим $\prod_{k \geq 1} (1 - t^{3k-2})(1 - t^{3k-1})(1 - t^{3k})$.
- В правой части:
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}} t^{k(k+1)/2} t^{k(k-1)} =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k t^{k(3k-1)/2} = 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left(x^{\frac{k(3k-1)}{2}} + x^{\frac{k(3k+1)}{2}} \right).$$

□

Рекуррентная формула для числа разбиений

Теорема

$$p(n) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \left(p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) \right).$$

Замечание

- Здесь мы считаем, что $p(m) = 0$ при $m < 0$. То есть рассматриваются только те слагаемые, где p берется от неотрицательных чисел.

- Если развернуть эту формулу, то получится

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \dots$$

Доказательство. Заметим, что

$$1 = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k} \prod_{k \geq 1} (1-x^k) = \left(\sum_{k \geq 0} p(k)x^k \right) \left(1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left(x^{\frac{k(3k-1)}{2}} + x^{\frac{k(3k+1)}{2}} \right) \right).$$

- Раскрыв скобки в правой части и рассмотрев коэффициент при x^n получим:

$$0 = p(n) + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left(p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) \right).$$