

# Дискретная математика

## Глава 7. Метод производящих функций

А. В. Пастор

27.03.2023

## Производящие функции

- Пусть  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  — произвольная последовательность чисел.
- *Производящей функцией* последовательности  $(a_n)$  называется выражение

$$A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} a_k x^k.$$

- Например, пусть  $a_k = C_n^k$  (где  $n \in \mathbb{N}$  — фиксировано). Тогда

$$A(x) = \sum_{k \geq 0} C_n^k x^k = (1 + x)^n.$$

- То есть  $(1 + x)^n$  — производящая функция для последовательности  $C_n^k$ .
- Еще одним примером построения производящей функции является доказанное в главе 6 равенство

$$\sum_{k=0}^n s(n, k) x^k = x(x-1) \dots (x-n+1).$$

- То есть  $x(x-1) \dots (x-n+1)$  — это производящая функция для чисел Стирлинга первого рода (при фиксированном  $n$ ).

## Производящие функции: примеры

- При помощи алгебраических преобразований таких выражений часто удается доказывать те или иные свойства комбинаторных величин.
- В качестве примера рассмотрим формулу, которую мы доказывали на практике:  $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \sum_{k \geq 0} C_{2n}^k x^k &= (1+x)^{2n} = ((1+x)^n)^2 = \left( \sum_{\ell \geq 0} C_n^\ell x^\ell \right) \left( \sum_{\ell \geq 0} C_n^\ell x^\ell \right) = \\ &= \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{\ell=0}^k C_n^\ell C_n^{k-\ell} \right) x^k. \end{aligned}$$

- Приравнивая коэффициенты при  $k = n$ , получаем

$$C_{2n}^n = \sum_{\ell=0}^n C_n^\ell C_n^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^n (C_n^\ell)^2. \quad \square$$

- В рассмотренных выше примерах, последовательность была конечной (точнее, включала конечное число ненулевых членов). Поэтому производящая функция оказывалась многочленом.
- Несколько сложнее обстоит дело с бесконечными последовательностями. Для них нужно рассматривать степенные ряды.

## Степенные ряды с точки зрения математического анализа

Пусть  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$  — степенной ряд. Мы можем смотреть на него как на функцию от  $x$ . Она будет определена при всех  $x \in \mathbb{R}$ , для которых этот ряд сходится. Из матанализа известны следующие свойства таких рядов.

- Существует такая константа  $R \in [0, +\infty]$ , что при  $|x| < R$  ряд  $A(x)$  сходится абсолютно и при  $|x| > R$  ряд  $A(x)$  расходится.
  - ▶ Такая константа  $R$  называется *радиусом сходимости* степенного ряда.
  - ▶ Если брать  $x \in \mathbb{C}$ , то ряд  $A(x)$  будет абсолютно сходиться внутри *круга сходимости* (т. е. круга радиуса  $R$  с центром в нуле) и расходиться вне этого круга.
  - ▶ При  $|x| = R$  ряд  $A(x)$  может как сходиться, так и расходиться.
- При любом  $r < R$  ряд  $A(x)$  равномерно сходится на отрезке  $[-r, r]$ . Следовательно, функция  $A(x)$  непрерывна и дифференцируема на всем интервале  $(-R, R)$ .
- Ряд  $A(x)$  можно *почленно дифференцировать*.
  - ▶ То есть  $A'(x) = \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}$ . При этом, ряды для  $A(x)$  и  $A'(x)$  имеют одинаковые радиусы сходимости.

## Степенные ряды с точки зрения математического анализа

- Аналогично, ряд  $A(x)$  можно *почленно интегрировать*.

▶ То есть 
$$\int_0^x A(t) dt = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

- ▶ При этом, ряды для  $A(x)$  и её первообразной функции имеют одинаковые радиусы сходимости.

- Если значения функций  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$  и  $B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$  совпадают всюду в некоторой окрестности нуля, то есть, если

$$\exists \delta > 0 \forall x \in [0, \delta) \left( \sum_{k \geq 0} a_k x^k = \sum_{k \geq 0} b_k x^k \right),$$

то  $\forall i a_i = b_i$ .

- Таким образом, если степенной ряд имеет ненулевой радиус сходимости, то последовательность однозначно задается своей производящей функцией.
- Однако бывают и степенные ряды с нулевым радиусом сходимости. Таков, например, ряд  $\sum_{k \geq 0} k! x^k$ . Такие ряды сходятся только при  $x = 0$  и говорить о задаваемой ими функции бессмысленно.

## Формальные степенные ряды

Другой подход заключается в том, что выражение  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$  можно рассматривать как *формальный степенной ряд*.

- То есть мы смотрим на это выражение как на формальную запись. Мы не будем пытаться подставлять какие-либо числа вместо  $x$  и выяснять, сходится ли получившийся ряд и к какому именно пределу он сходится.
  - ▶ Единственным исключением здесь является случай  $x = 0$ : мы будем формально полагать, что  $A(0) \stackrel{\text{def}}{=} a_0$ .
- Строго говоря, формальный степенной ряд *не является функцией*.
- Формальный степенной ряд однозначно задается последовательностью своих коэффициентов.
  - ▶ Можно считать, что формальный степенной ряд  $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  — это и есть последовательность  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ .
  - ▶ Переменная  $x$  и её степени пишутся здесь исключительно для удобства.
  - ▶ В итоге получится определение кольца формальных степенных рядов, очень похожее на определение кольца многочленов.

## Кольцо формальных степенных рядов

### Определение

Пусть  $K$  — коммутативное кольцо.

- **Кольцо формальных степенных рядов** над  $K$  состоит из бесконечных последовательностей  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  с коэффициентами из  $K$ .
- Сложение и умножение в кольце формальных степенных рядов осуществляется по следующим формулам.

Пусть  $A = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots)$  и  $B = (b_0, b_1, \dots, b_k, \dots)$ . Тогда

- ▶  $A + B \stackrel{\text{def}}{=} (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_k + b_k, \dots)$ ;
- ▶  $A \cdot B \stackrel{\text{def}}{=} (c_0, c_1, \dots, c_k, \dots)$ , где  $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ .
- Кольцо формальных степенных рядов над  $K$  обозначается  $K[[x]]$ , где  $x$  — **формальная переменная**.
- Для элемента  $A = (a_0, a_1, \dots, a_k, \dots) \in K[[x]]$  мы будем использовать обозначения  $A(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + \dots$  или  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ .
- ▶ Также мы будем использовать обозначение  $A(0) \stackrel{\text{def}}{=} a_0$ .

## Кольцо формальных степенных рядов: замечания

### Замечание

- Очевидно, что в приведенных выше обозначениях выполняются равенства  $(A + B)(0) = A(0) + B(0)$  и  $(AB)(0) = A(0)B(0)$ .
- Определение кольца формальных степенных рядов очень похоже на определение кольца многочленов. Единственным отличием является то, что в определении кольца формальных степенных рядов отсутствует требование конечности числа ненулевых коэффициентов.
  - ▶ То есть  $K[x] \subset K[[x]]$  и при этом сложение и умножение в этих кольцах осуществляются по одним и тем же формулам. Это означает, что кольцо  $K[x]$  является *подкольцом* кольца  $K[[x]]$ . (Но для того, чтобы говорить об этом строго, нам еще нужно доказать то, что  $K[[x]]$  — кольцо.)
- В основном, мы будем рассматривать кольцо  $\mathbb{R}[[x]]$ . Элементы этого кольца можно рассматривать как степенные ряды в  $\mathbb{R}$  и, в частности, говорить об их сходимости при тех или иных значениях  $x$ . Можно доказать, что если оба ряда  $A(x)$  и  $B(x)$  абсолютно сходятся при некотором  $x$ , то определенные выше ряды для  $(A + B)(x)$  и  $(AB)(x)$  также сходятся при том же  $x$  и их пределы равны  $A(x) + B(x)$  и  $A(x)B(x)$  соответственно.



## Кольцо формальных степенных рядов: доказательство

### Теорема

Пусть  $K$  — коммутативное кольцо. Тогда  $K[[x]]$  — тоже коммутативное кольцо. Если при этом  $K$  — кольцо с единицей, то  $K[[x]]$  — тоже с единицей.

**Доказательство.** В целом аналогично доказательству для  $K[x]$ .

- Поскольку сложение формальных степенных рядов осуществляется поэлементно, все свойства сложения (коммутативность, ассоциативность, существование нейтрального и обратного элементов) непосредственно следуют из аналогичных свойств в кольце  $K$ .

- **Коммутативность умножения.** Пусть  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ ,  
 $B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$ ,  $(AB)(x) = \sum_{k \geq 0} d_k x^k$  и  $(BA)(x) = \sum_{k \geq 0} d'_k x^k$ .

Тогда  $d_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{j=0}^k b_j a_{k-j} = d'_k$ .

- **Дистрибутивность.** Пусть  $C(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^k$ ,  $(AC)(x) = \sum_{k \geq 0} e_k x^k$  и  $(A(B+C))(x) = \sum_{k \geq 0} f_k x^k$ .

Тогда  $f_k = \sum_{i=0}^k a_i (b_{k-i} + c_{k-i}) = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} + \sum_{i=0}^k a_i c_{k-i} = d_k + e_k$ .

## Кольцо формальных степенных рядов: доказательство

- **Ассоциативность умножения.** Пусть  $((AB)C)(x) = \sum_{k \geq 0} g_k x^k$ .
- Тогда

$$g_s = \sum_{i=0}^s d_i c_{s-i} = \sum_{i=0}^s \left( \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) c_{s-i} = \sum_{i+j+k=s} a_i b_j c_k.$$

Аналогично доказывается, что коэффициент при  $x^s$  ряда  $(A(BC))$  равен тому же числу. Следовательно,  $(A(BC)) = ((AB)C)$ .

- **Единичный элемент.** Если существует  $1 \in K$ , то легко видеть, что единичным элементом в  $K[[x]]$  будет формальный степенной ряд, соответствующий последовательности  $(1, 0, 0, \dots)$ . □

- Итак, формальные степенные ряды можно складывать, вычитать и умножать. А можно ли их делить?

- **Можно. Но не всегда.**

## Обратимые элементы кольца $K[[x]]$

- Напомним, что элемент  $a \in K$  (где  $K$  — кольцо с единицей) называется **обратимым**, если существует такой элемент  $b \in K$ , что  $ab = ba = 1$ . В этом случае, элемент  $b$  называется **обратным** к элементу  $a$  и обозначается  $a^{-1}$ .
- В курсе алгебры доказывалось, что для любого элемента кольца существует не более одного обратного.
- Множество всех обратимых элементов кольца  $K$  обозначается через  $K^*$ .

### Теорема

Формальный степенной ряд  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$  является обратимым элементом кольца  $K[[x]]$  если и только если  $a_0 \in K^*$ .

Доказательство. “ $\Rightarrow$ ”: Пусть  $B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$  — обратный элемент к  $A(x)$ .

- Тогда  $a_0 b_0 = 1$ , следовательно,  $a_0 \in K^*$ .

“ $\Leftarrow$ ”: Пусть  $a_0 \in K^*$ .

- Будем последовательно вычислять коэффициенты  $b_i$  формального степенного ряда  $B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$ , обратного к  $A(x)$ .

## Обратимые элементы кольца $K[[x]]$

- Должны выполняться соотношения

- ▶  $a_0 b_0 = 1$ ;

- ▶  $\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = 0$ , при  $k > 0$ .

- Тогда положим  $b_0 \stackrel{\text{def}}{=} a_0^{-1}$ ;

- при  $k > 0$  вычисляем  $b_k$  по формуле  $b_k = a_0^{-1}(-\sum_{i=1}^k a_i b_{k-i})$ . □

### Следствие

Пусть  $K$  — поле. Тогда формальный степенной ряд  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$  является обратимым элементом кольца  $K[[x]]$  если и только если  $a_0 \neq 0$ .

### Пример

- Пусть  $A(x) = 1 - x$ .

- Тогда легко видеть, что  $A^{-1}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

- То есть формула  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ , известная как сумма геометрической прогрессии, является верным равенством и для формальных степенных рядов.

## Производящая функция для чисел Фибоначчи

- Напомним, что последовательность чисел Фибоначчи задается соотношениями  $F_0 = 0, F_1 = F_2 = 1$  и  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ , при  $n > 1$ .

### Теорема

Производящая функция для чисел Фибоначчи имеет вид  $F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$ .

Доказательство. Пусть  $F(x) = \sum_{k \geq 0} F_k x^k$ .

- Тогда  $x F(x) = \sum_{k \geq 0} F_k x^{k+1} = \sum_{k \geq 1} F_{k-1} x^k$ .
- Аналогично,  $x^2 F(x) = \sum_{k \geq 0} F_k x^{k+2} = \sum_{k \geq 2} F_{k-2} x^k$ .

• Тогда

$$\begin{aligned} x F(x) + x^2 F(x) &= F_0 \cdot x + \sum_{k \geq 2} F_{k-1} x^k + \sum_{k \geq 2} F_{k-2} x^k = \\ &= \sum_{k \geq 2} (F_{k-1} + F_{k-2}) x^k = \sum_{k \geq 2} F_k x^k = F(x) - x. \end{aligned}$$

- Следовательно,  $x = F(x) - x F(x) - x^2 F(x) = (1 - x - x^2) F(x)$ ,

- откуда  $F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$ .



## Формула для чисел Фибоначчи

Следствие (Формула Бине)

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right).$$

Доказательство.

• Заметим, что числа  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  и  $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  являются корнями квадратного уравнения  $t^2 - t - 1 = 0$ . Следовательно,  $t^2 - t - 1 = (t - \varphi)(t - \varphi')$ .

• Подставив  $t = \frac{1}{x}$  и домножив на  $x^2$  получим

$$1 - x - x^2 = x^2 \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 \right) = x^2 \left( \frac{1}{x} - \varphi \right) \left( \frac{1}{x} - \varphi' \right) = (1 - \varphi x)(1 - \varphi' x).$$

• Тогда  $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\varphi - \varphi'} \left( \frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1-\varphi' x} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{1-\varphi x} - \frac{1}{1-\varphi' x} \right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{k \geq 0} (\varphi x)^k - \sum_{k \geq 0} (\varphi' x)^k \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^k - \varphi'^k) x^k.$$

• Таким образом,  $F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right).$

□

## Производящая функция для чисел Каталана

### Теорема

Производящая функция для чисел Каталана имеет вид  $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ .

Доказательство. Пусть  $C(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^k$ .

- Отметим, что  $c_k \leq C_{2k}^k \leq 4^k$  при всех  $k \geq 0$ . Поэтому ряд для  $C(x)$  сходится при  $|x| < \frac{1}{4}$  и дает в пределе непрерывную функцию на  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ .
- Тогда  $C^2(x) = \left( \sum_{k \geq 0} c_k x^k \right)^2 = \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{i=0}^k c_i c_{k-i} \right) x^k = \sum_{k \geq 0} c_{k+1} x^k = \frac{C(x) - 1}{x}$ .
- Преобразовав, получим
  - ▶  $4x^2 C^2(x) = 4xC(x) - 4x$ ;
  - ▶  $(2xC(x) - 1)^2 = 1 - 4x$ ;
  - ▶  $2xC(x) - 1 = \pm \sqrt{1 - 4x}$ ;
  - ▶ подставив  $x = 0$  убеждаемся, что в правой части должен стоять минус.
- Таким образом,  $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ . □

## Производящая функция для чисел Каталана

Следствие

$$c_k = \frac{C_{2k}^k}{k+1}.$$

Доказательство. Разложим  $\sqrt{1-4x}$  по формуле Тейлора.

$$\bullet \sqrt{1-4x} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4x)^k, \text{ где } \binom{a}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}.$$

$$\bullet C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = -\frac{1}{2x} \sum_{k \geq 1} \binom{1/2}{k} (-4x)^k =$$

$$= -\frac{1}{2x} \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k+1} (-4x)^{k+1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{1/2}{k+1} 2^{2k+1} x^k.$$

$$\bullet c_k = (-1)^k \binom{1/2}{k+1} 2^{2k+1} = \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{2k-1}{2}\right) \cdot 2^{2k+1}}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{(2k-1)!! \cdot 2^k}{(k+1)!} = \frac{(2k-1)!! \cdot k! \cdot 2^k}{k!(k+1)!} = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} = \frac{C_{2k}^k}{k+1}.$$

□



## Композиция формальных степенных рядов

- Пусть  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$  и  $B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$  — формальные степенные ряды.
- Попробуем подставить ряд  $B(x)$  в  $A(x)$ . То есть будем пытаться определить **композицию**  $A(B(x))$  этих двух рядов.
- Всегда ли такая композиция корректно определена? *Не всегда.*
- Попробуем определить  $A(B(x)) = \sum_{k \geq 0} a_k B^k(x)$ .
  - ▶ Каждое слагаемое  $a_k B^k(x)$  является формальным степенным рядом.
  - ▶ Проблема в том, что получается бесконечная сумма формальных степенных рядов.
  - ▶ То есть, вычисляя коэффициент при  $x^n$  нужно будет сложить бесконечно много слагаемых.
  - ▶ Однако, если  $b_0 = 0$ , то ненулевые коэффициенты при  $x^n$  будут только в слагаемых  $a_k B^k(x)$  при  $k \leq n$ . В этом случае коэффициент при  $x^n$  определяется как сумма лишь конечного числа слагаемых и мы можем формально определить  $A(B(x))$  как формальный степенной ряд именно с такими коэффициентами.

## Предел последовательности формальных степенных рядов

Сделаем то же самое более формально.

### Определение

- Пусть  $K$  — коммутативное кольцо с единицей, в котором нет делителей нуля, и  $A_n(x) = \sum_{k \geq 0} a_{nk} x^k$  — последовательность формальных степенных рядов из  $K[[x]]$ .
- Формальный степенной ряд  $B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$  называется *пределом* последовательности  $(A_n)$ , если  $\forall k \geq 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N (a_{nk} = b_k)$ .
- Обозначения:  $A_n(x) \rightarrow B(x)$  или  $B(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$ .

### Замечание

Другими словами, для любого  $k \geq 0$  последовательность  $(a_{nk})$  коэффициентов при  $x^k$  стабилизируется: начиная с некоторого места все её члены становятся равными  $b_k$ .

## Предел последовательности формальных степенных рядов: свойства

### Утверждение 1

Если  $A_n(x) \rightarrow B(x)$  и  $A_n(x) \rightarrow C(x)$ , то  $B(x) = C(x)$ .

Доказательство. Рассмотрим  $k \geq 0$ .

- По определению, найдутся такие  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ , что  $\forall n \geq N_1 (a_{nk} = b_k)$  и  $\forall n \geq N_2 (a_{nk} = c_k)$ .
- Тогда при  $n = \max(N_1, N_2)$  имеем  $b_k = a_{nk} = c_k$ . □

### Утверждение 2

Пусть  $A_n(x) \rightarrow B(x)$  и  $C_n(x) \rightarrow D(x)$ . Тогда

1.  $(A_n + C_n)(x) \rightarrow (B + D)(x)$ ;
2.  $(A_n C_n)(x) \rightarrow (BD)(x)$ .

Доказательство. Пусть  $k \geq 0$ .

- Выберем  $N$  так, чтобы  $\forall i \leq k \forall n \geq N (a_{ni} = b_i \ \& \ c_{ni} = d_i)$ .
- Тогда при  $n \geq N$  имеем  $a_{nk} + c_{nk} = b_k + d_k$  и  $\sum_{i=0}^k a_{ni} c_{n,k-i} = \sum_{i=0}^k b_i d_{k-i}$ . □

## Дискретное нормирование в кольце $K[[x]]$

### Определение

Пусть  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$  — формальный степенной ряд.

- Назовем *нормой* ряда  $A(x)$  величину  $\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a_k \neq 0\}$ .
- В случае  $A(x) = 0$  положим  $\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \infty$ .

### Утверждение 3

Определенная выше функция  $\nu: K[[x]] \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ , обладает следующими свойствами:

1.  $\nu(A) = \infty \iff A = 0$ ;
2.  $\nu(AB) = \nu(A) + \nu(B)$ ;
3.  $\nu(A + B) \geq \min\{\nu(A), \nu(B)\}$ .

*Доказательство.* Свойство 1. непосредственно следует из определения.

- Пусть  $\nu(A) = m$  и  $\nu(B) = n$ .
  - В случае, если  $A = 0$  или  $B = 0$ , свойства 2. и 3. очевидно выполнены.
- Поэтому далее мы будем считать, что  $m, n < \infty$ .

## Дискретное нормирование в кольце $K[[x]]$

2. Пусть  $(AB)(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^k$ , где  $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ .

- Заметим, что  $a_i b_{k-i} = 0$  как при  $i < m$ , так и при  $i > k - n$ .
- Следовательно,  $c_{m+n} = a_m b_n \neq 0$  и  $c_k = 0$  при  $k < m + n$ .
- А это и означает, что  $\nu(AB) = m + n$ .

3. При  $k < \min\{m, n\}$  очевидно, что  $a_k + b_k = 0$ .

- Следовательно,  $\nu(A + B) \geq \min\{m, n\}$ . □

### Следствие

Если в кольце  $K$  нет делителей нуля, то в  $K[[x]]$  также нет делителей нуля.

### Замечание

- Функция с такими свойствами называется **дискретным нормированием** в кольце  $K[[x]]$ .
- Функция  $\nu(A)$  ведет себя так же, как и степень многочлена. В некоторых книгах её называют **степенью** формального степенного ряда и обозначают  $\deg(A)$ . Но мы так делать не будем во избежание путаницы с обычной степенью многочлена. Все-таки формально это разные функции.

## Дискретное нормирование и пределы в кольце $K[[x]]$

### Утверждение 4

Последовательность формальных степенных рядов  $A_n(x)$  имеет предел, если и только если  $\lim_{i \rightarrow \infty} \nu(A_{i+1} - A_i) = \infty$ .

Доказательство. “ $\Rightarrow$ ” Пусть  $A_n(x) \rightarrow B(x)$ . Рассмотрим произвольное  $k \in \mathbb{N}$ .

- Тогда найдется такое  $N_k \in \mathbb{N}$ , что  $\forall n \geq N_k \forall j \leq k (a_{nj} = b_j)$ .
- Следовательно, при  $i \geq N_k$  имеем  $\forall j \leq k (a_{i+1,j} - a_{ij} = 0)$ , то есть  $\nu(A_{i+1} - A_i) > k$ .

“ $\Leftarrow$ ” Пусть  $\lim_{i \rightarrow \infty} \nu(A_{i+1} - A_i) = \infty$ . Рассмотрим произвольное  $k \in \mathbb{N}_0$ .

- Тогда найдется такое  $N_k \in \mathbb{N}$ , что  $\forall i \geq N_k (\nu(A_{i+1} - A_i) > k)$ .
- Следовательно, при  $\forall i \geq N_k (a_{ik} = a_{N_k k})$ .
- Тогда, обозначив  $b_k \stackrel{\text{def}}{=} a_{N_k k}$ , получим, что  $A_n(x) \rightarrow \sum_{k \geq 0} b_k x^k$ . □

## Замечание о расстояниях между формальными степенными рядами

### Замечание

- Фактически, мы считаем, что два формальных степенных ряда тем ближе, чем больше норма их разности. Другими словами, ряды тем ближе, чем позже наступает первое различие в их коэффициентах.
- Формально это можно задать введя следующую **функцию расстояния** в кольце  $K[[x]]$ :

$$\rho(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-\nu(A-B)}.$$

- Тогда  $A_n(x) \rightarrow B(x)$  если и только если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n, B) = 0$ .
- Можно проверить, что для заданной таким образом функции расстояния выполнены основные свойства обычного расстояния между точками.

В частности, выполнено **неравенство треугольника**:

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C).$$

- Такая функция расстояния задает на  $K[[x]]$  структуру **метрического пространства**. Но подробно о метрических пространствах мы говорить не будем.

## Бесконечные суммы и произведения формальных степенных рядов

### Определение

- Пусть  $A_i(x)$  — последовательность формальных степенных рядов.
- Тогда обозначим

$$\blacktriangleright \sum_{i \geq 0} A_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n A_i(x);$$

$$\blacktriangleright \prod_{i \geq 0} A_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n A_i(x).$$

- Будем говорить, что бесконечная сумма или бесконечное произведение *сходится*, если указанный в определении предел существует.

### Замечание

- Тем самым, мы можем рассматривать формальный степенной ряд  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$  как бесконечную сумму своих одночленов  $a_k x^k$ .
- Для простоты, говоря о бесконечных произведениях, мы далее будем ограничиваться случаем, когда у всех множителей свободные члены равны 1.



## Сходимость бесконечных сумм и произведений

### Теорема

1.  $\sum_{i \geq 0} A_i(x)$  сходится, если и только если  $\lim_{i \rightarrow \infty} \nu(A_i) = \infty$ ;
2.  $\prod_{i \geq 0} (1 + B_i(x))$ , где  $\forall i \nu(B_i) > 0$ , сходится, если и только если  $\lim_{i \rightarrow \infty} \nu(B_i) = \infty$ .

### Доказательство.

1. По утверждению 4 сходимость суммы равносильна тому, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu \left( \sum_{i=0}^{n+1} A_i(x) - \sum_{i=0}^n A_i(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_{n+1}) = \infty.$$

2. Аналогично, сходимость произведения равносильна тому, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \nu \left( \prod_{i=0}^{n+1} (1 + B_i(x)) - \prod_{i=0}^n (1 + B_i(x)) \right) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu \left( \prod_{i=0}^n (1 + B_i(x)) B_{n+1}(x) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^n \nu(1 + B_i(x)) + \nu(B_{n+1}(x)) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(B_{n+1}) = \infty. \end{aligned}$$

□

## Еще о композиции формальных степенных рядов

Теперь мы можем дать формальное определение композиции формальных степенных рядов. Пусть  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$  и  $B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$  — формальные степенные ряды.

### Определение

- $A(B(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} a_k B^k(x)$  — *композиция* рядов  $A$  и  $B$ .
- Композиция определена, если и только если указанная выше бесконечная сумма сходится.

Поймем, при каких условиях  $A(B(x))$  определена. Есть два случая.

- 1° Тривиальный случай: если  $A(x)$  — многочлен (т. е. начиная с некоторого места все  $a_i = 0$ ). Тогда в бесконечной сумме лишь конечное число ненулевых слагаемых. Очевидно, что тогда она сходится.
- 2° Если  $\nu(B) > 0$  (т. е. у  $B(x)$  нулевой свободный член), то  $\nu(a_k B^k(x)) = \nu(a_k) + k\nu(B(x)) \geq k\nu(B(x)) \rightarrow +\infty$  и бесконечная сумма также сходится.

- Докажем, что в остальных случаях композиция не определена.

## Еще о композиции формальных степенных рядов

### Теорема

Композиция  $A(B(x))$  определена тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих двух утверждений.

1°  $A(x)$  — многочлен (т. е. начиная с некоторого места все  $a_k = 0$ );

2°  $\nu(B) > 0$ .

Доказательство. “ $\Leftarrow$ ”: доказано выше.

“ $\Rightarrow$ ”: Пусть  $A(B(x))$  определена и при этом  $\nu(B) = 0$ .

- Тогда,  $\nu(a_k B^k(x)) = \nu(a_k) + k\nu(B(x)) = \nu(a_k) \rightarrow \infty$ .
- Но тогда начиная с некоторого места все  $a_k = 0$ . □

### Примеры

1. Подставим в равенство  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  ряд  $x^n$ .

Получим равенство  $\frac{1}{1-x^n} = 1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots$

2. Введем обозначение  $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ . Тогда выражение  $e^{e^x-1}$  определено как формальный степенной ряд. А выражение  $e^{x+1}$  — не определено!

## Производящая функция числа разбиений

Теорема

$$\sum_{n \geq 0} p(n)x^n = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k}.$$

Доказательство.

- $\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k} = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots) \dots$
- Заметим, что коэффициент при  $x^n$  получается при перемножении первых  $n$  скобок этого бесконечного произведения.
- Для того, чтобы в произведении  $\prod_{k=1}^n (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \dots)$  получить слагаемое  $x^n$ , нам нужно перемножить слагаемые вида  $x^{t_k k}$  из каждой скобки (где  $t_k \in \mathbb{N}_0$ ).
- То есть коэффициент при  $x^n$  равен числу решений уравнения  $t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \dots + nt_n = n$  в целых неотрицательных числах, а оно равно  $p(n)$ . □
- Многие утверждения о количествах разбиений можно доказать при помощи производящих функций.
- В качестве примера, рассмотрим одну из задач из серии про разбиения.

## Производящая функция числа разбиений

### Утверждение

*Количество представлений натурального числа  $n$  в виде суммы различных натуральных слагаемых равно количеству его представлений в виде суммы нечетных, не обязательно различных слагаемых.*

**Доказательство.** Аналогично доказанному выше можно получить, что

- производящая функция для числа разбиений на нечетные слагаемые равна  $\prod_{k \not\equiv 2} \frac{1}{1-x^k}$ ;
- производящая функция для числа разбиений на различные слагаемые равна  $\prod_{k \geq 1} (1+x^k)$ .
- Докажем, что они равны. Для этого заметим, что  $\frac{1}{1-x^k} = \prod_{\ell \geq 0} (1+x^{k2^\ell})$ .
  - ▶ Действительно, докажем, что  $(1-x^k) \prod_{\ell=0}^{m-1} (1+x^{k2^\ell}) = 1-x^{k2^m}$ .
  - ▶  $m = 1$ :  $(1-x^k)(1+x^k) = 1-x^{2k}$ ;
  - ▶  $m \rightarrow m+1$ :  $(1-x^k) \prod_{\ell=0}^m (1+x^{k2^\ell}) = (1-x^{k2^m})(1+x^{k2^m}) = 1-x^{k2^{m+1}}$ .
- Перемножив полученные равенства по всем  $k \not\equiv 2$ , получим требуемое.  $\square$

## Формальная производная

### Определение

- Пусть  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$  — формальный степенной ряд.
- *Формальной производной* ряда  $A(x)$  называется формальный степенной ряд

$$A'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}.$$

- Наша цель состоит в том, чтобы проверить, что формальная производная обладает теми же свойствами, что и обычная производная функции.
- Для этого мы дадим эквивалентную переформулировку определения формальной производной, сделав его более похожим на классическое определение производной.
- Разложим выражение  $A(x+t)$  по степеням  $t$ . Оказывается, что коэффициент при  $t^1$  равен как раз  $A'(x)$ .
  - ▶ Здесь мы рассматриваем  $A(x+t)$  как *формальный степенной ряд от двух переменных,  $x$  и  $t$* .

## Формальные степенные ряды от двух переменных

- Пусть  $K$  — коммутативное кольцо с единицей.
- Мы доказывали, что тогда  $K[[x]]$  — также коммутативное кольцо с единицей.
  - ▶ И если в кольце  $K$  нет делителей нуля, то в  $K[[x]]$  их также нет.
- Следовательно, мы можем рассмотреть кольцо формальных степенных рядов с коэффициентами из  $K[[x]]$ .

### Определение

- Кольцо  $K[[x, t]] \stackrel{\text{def}}{=} (K[[x]])[[t]]$  называется *кольцом формальных степенных рядов от двух переменных*.

### Замечание

- Формально, элемент кольца  $K[[x, t]]$  — это “последовательность последовательностей” элементов кольца  $K$ , т. е. бесконечная двумерная матрица  $F = (f_{kl})_{k,l=0}^{\infty}$ , где  $f_{kl} \in K$ .
- Эти элементы записывают как формальные суммы вида 
$$F(x, t) = \sum_{k,l \geq 0} f_{kl} x^k t^l.$$

## Формальная производная и ряды от двух переменных

- Пусть  $F(x, t) = \sum_{k, l \geq 0} f_{kl} x^k t^l$  и  $G(x, t) = \sum_{k, l \geq 0} g_{kl} x^k t^l$ . Тогда легко видеть, что их сумма и произведение задаются следующими формулами:
  - $(F + G)(x, t) = \sum_{k, l \geq 0} (f_{kl} + g_{kl}) x^k t^l$ ;
  - $(F \cdot G)(x, t) = \sum_{k, l \geq 0} h_{kl} x^k t^l$ , где  $h_{kl} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l f_{ij} g_{k-i, l-j}$ .
- По доказанному выше,  $K[[x, t]]$  — коммутативное кольцо с единицей.
- Более того, если в кольце  $K$  нет делителей нуля, то в кольце  $K[[x, t]]$  также нет делителей нуля.
- Аналогично можно определить  $K[[x_1, \dots, x_n]]$  — *кольцо формальных степенных рядов от  $n$  переменных*.

### Лемма

$A(x + t) = A(x) + A'(x)t + U(x, t)t^2$ , где  $U(x, t) \in K[[x, t]]$ .

Доказательство. Пусть  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ . Тогда

$$\begin{aligned} A(x + t) &= \sum_{k \geq 0} a_k (x + t)^k = \sum_{k \geq 0} a_k (x^k + kx^{k-1}t + \sum_{i=2}^k C_k^i x^{k-i} t^i) = \\ &= \sum_{k \geq 0} a_k x^k + (\sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1}) t + (\sum_{k \geq 2} \sum_{i=2}^k a_k C_k^i x^{k-i} t^{i-2}) t^2. \end{aligned}$$





## Свойства формальной производной

Следствие

$$A'(x) = \left. \frac{A(x+t) - A(x)}{t} \right|_{t=0}.$$

Теорема

1.  $(A + B)'(x) = A'(x) + B'(x)$ ;
2.  $(AB)'(x) = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$ ;
3.  $\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)}$ ;
4.  $(A(B(x)))' = A'(B(x))B'(x)$ .

Доказательство. Пусть

$$A(x+t) = A(x) + A'(x)t + U(x,t)t^2 \text{ и } B(x+t) = B(x) + B'(x)t + V(x,t)t^2.$$

Тогда

1.  $(A + B)(x+t) = (A + B)(x) + (A'(x) + B'(x))t + (U(x,t) + V(x,t))t^2$ ;

## Свойства формальной производной

$$2. (AB)(x+t) = (A(x) + A'(x)t + U(x, t)t^2)(B(x) + B'(x)t + V(x, t)t^2) = \\ = (AB)(x) + (A'(x)B(x) + A(x)B'(x))t + W(x, t)t^2;$$

$$3. A(x) = \left(\frac{A(x)}{B(x)}\right) B(x) \Rightarrow A'(x) = \left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' B(x) + \left(\frac{A(x)}{B(x)}\right) B'(x) \\ \Rightarrow \left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)}.$$

$$4. \text{ Пусть } T(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} B(x+t) - B(x) = t(B'(x) + V(x, t)t).$$

- Отметим, что ряды  $B(x)$  и  $T(x, t)$  имеют нулевые свободные члены. Так что их можно подставить в выражение для  $A(x+t)$  вместо  $x$  и  $t$  соответственно.

- Тогда

$$A(B(x+t)) = A(B(x) + T(x, t)) = \\ = A(B(x)) + A'(B(x))T(x, t) + U(B(x), T(x, t))T^2(x, t) = \\ = A(B(x)) + A'(B(x))B'(x)t + \\ + (A'(B(x))V(x, t) + U(B(x), T(x, t))(B'(x) + V(x, t)t)^2)t^2.$$



## Формальная производная: примеры

Здесь и далее мы будем рассматривать кольцо  $\mathbb{R}[[x]]$ .

1. Очевидно, что  $A'(x) = 0 \iff A(x) = a_0 \in \mathbb{R}$ .

• Более того, если  $A'(x) = B(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k$ ,  
то  $A(x) = a_0 + \sum_{k \geq 0} \frac{b_k}{k+1} x^{k+1}$ .

2. Как и раньше, пусть  $e^x = \exp(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ . Тогда  $\exp'(x) = \exp(x)$ .

• Более того, если  $A'(x) = A(x)$ , то  $A(x) = a_0 \exp(x)$ .

• Действительно, если  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ , то приравняв коэффициенты при  $x^{k-1}$  в равенстве  $A'(x) = A(x)$  получим  $a_{k-1} = k a_k$ , откуда  $a_k = \frac{a_0}{k!}$ .

3. Введем также обозначение  $\ln(1+x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ .

Тогда  $\ln(1+x)' = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \frac{1}{1+x}$ .

4. Пусть  $B(x)$  — формальный степенной ряд, такой, что  $B(0) = 1$ .

Тогда мы можем определить **логарифм** этого ряда как композицию двух формальных степенных рядов:  $\ln B(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln(1 + (B(x) - 1))$ .

• Заметим, что тогда  $(\ln B(x))' = \frac{B'(x)}{B(x)}$ .

## Логарифмическая производная и её свойства

### Определение

Формальный степенной ряд  $\frac{B'(x)}{B(x)}$  называется *логарифмической производной* ряда  $B(x)$  (где  $B(0) = 1$ ).

### Лемма

Пусть  $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$  таковы, что  $A(0) = B(0) = 1$  и  $\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{B'(x)}{B(x)}$ .

Тогда  $A(x) = B(x)$ .

Доказательство.

$$0 = \frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{A(x)B(x)} = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B^2(x)} \frac{B(x)}{A(x)} = \left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' \cdot \frac{B(x)}{A(x)}.$$

- Следовательно,  $\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' = 0$ , то есть  $\frac{A(x)}{B(x)}$  — константа.
- Поскольку  $A(0) = B(0) = 1$ , получаем, что  $A(x) = B(x)$ . □

### Следствие

Если  $\ln A(x) = \ln B(x)$ , то  $A(x) = B(x)$ .

## Логарифмирование и экспоненцирование степенных рядов

### Теорема

Пусть  $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$  таковы, что  $A(0) = 0, B(0) = 1$  и  $\frac{B'(x)}{B(x)} = A'(x)$ .

Тогда  $B(x) = \exp(A(x))$ .

Доказательство.

- $\frac{(\exp(A(x)))'}{\exp(A(x))} = \frac{\exp(A(x))A'(x)}{\exp(A(x))} = A'(x) = \frac{B'(x)}{B(x)}$ .
- Тогда по лемме  $B(x) = \exp(A(x))$ . □

### Замечание

• Мы видели, что если  $A(0) = 0$ , то можно рассмотреть **экспоненту**  $\exp(A(x))$ . При этом,  $\exp(A(0)) = 1$ .

• А если  $B(0) = 1$ , то можно рассмотреть логарифм  $\ln(B(x))$ .

И тогда  $\ln(B(0)) = 0$ .

• Как и для чисел, эти две операции оказываются взаимно обратными.

# Логарифмирование и экспоненцирование степенных рядов

## Теорема

Пусть  $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$  таковы, что  $A(0) = 0$  и  $B(0) = 1$ . Тогда

1.  $\ln(\exp(A(x))) = A(x)$ ;
2.  $\exp(\ln(B(x))) = B(x)$ .

Доказательство.

$$1. (\ln(\exp(A(x))))' = \frac{(\exp(A(x)))'}{\exp(A(x))} = \frac{\exp(A(x))A'(x)}{\exp(A(x))} = A'(x).$$

$$2. \frac{(\exp(\ln(B(x))))'}{\exp(\ln(B(x)))} = \frac{\exp(\ln(B(x)))(\ln(B(x)))'}{\exp(\ln(B(x)))} = \frac{B'(x)}{B(x)}.$$

□

- Другие привычные нам свойства экспоненты и логарифма здесь также выполнены.

## Логарифмирование и экспоненцирование степенных рядов

### Теорема

Пусть  $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$  таковы, что  $A(0) = B(0) = 1$ . Тогда  $\ln(A(x)B(x)) = \ln A(x) + \ln B(x)$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} (\ln(A(x)B(x)))' &= \frac{(A(x)B(x))'}{A(x)B(x)} = \frac{A'(x)B(x) + A(x)B'(x)}{A(x)B(x)} = \\ &= \frac{A'(x)}{A(x)} + \frac{B'(x)}{B(x)} = (\ln A(x) + \ln B(x))'. \end{aligned}$$

□

### Следствие

Пусть  $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[[x]]$  таковы, что  $A(0) = B(0) = 0$ . Тогда  $\exp(A(x) + B(x)) = \exp A(x) \exp B(x)$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \ln(\exp(A(x) + B(x))) &= A(x) + B(x) = \\ &= \ln(\exp A(x)) + \ln(\exp B(x)) = \ln(\exp A(x) \exp B(x)). \end{aligned}$$

□

## Экспоненциальные производящие функции

- Пусть  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  — произвольная последовательность чисел.
- *Экспоненциальной производящей функцией* последовательности  $(a_n)$  называется выражение

$$A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \geq 0} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

### Пример

- Найдем экспоненциальную производящую функцию последовательности  $a_n$ , заданной следующими соотношениями:  
 $a_0 = a_1 = 1$  и  $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$  при  $n \geq 2$ .

- Пусть  $A(x) = \sum_{k \geq 0} a_k \frac{x^k}{k!}$ .
- Тогда  $A'(x) = \sum_{k \geq 1} a_k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + \sum_{k \geq 2} (a_{k-1} + (k-1)a_{k-2}) \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} =$   
 $= \sum_{k \geq 1} a_{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k \geq 2} a_{k-2} \frac{x^{k-1}}{(k-2)!} = A(x) + xA(x)$ .
- Следовательно,  $\frac{A'(x)}{A(x)} = 1 + x = (x + \frac{x^2}{2})'$ .
- Таким образом,  $A(x) = \exp(x + \frac{x^2}{2})$ .



## Экспоненциальные производящие функции для чисел Стирлинга

Теорема

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k, \text{ при всех } k \geq 0.$$

Доказательство. Индукция по  $k$ .

$$k = 0: \sum_{n \geq 0} S(n, 0) \frac{x^n}{n!} = 1 = \frac{1}{0!} (e^x - 1)^0.$$

$$k - 1 \rightarrow k: \text{ Пусть } F_k(x) = \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^n}{n!}.$$

- $F_k(x) = \sum_{n \geq k} (kS(n-1, k) + S(n-1, k-1)) \frac{x^n}{n!} =$   
 $= k \sum_{n \geq k} S(n-1, k) \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \geq k} S(n-1, k-1) \frac{x^n}{n!}.$
- $F'_k(x) = k \sum_{n \geq k} S(n-1, k) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n \geq k} S(n-1, k-1) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} =$   
 $= kF_k(x) + F_{k-1}(x).$
- По индукционному предположению имеем  $F_{k-1}(x) = \frac{1}{(k-1)!} (e^x - 1)^{k-1}$ , следовательно,

$$F'_k(x) = kF_k(x) + \frac{1}{(k-1)!} (e^x - 1)^{k-1}. \quad (1)$$

- Также мы знаем, что  $F_k(0) = 0$ . (2)

## Экспоненциальные производящие функции чисел Стирлинга и Белла

- Заметим, что решение  $F_k(x) = \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k$  подходит под оба условия:  

$$\left(\frac{1}{k!}(e^x - 1)^k\right)' = \frac{1}{(k-1)!}(e^x - 1)^{k-1}e^x = k\frac{1}{k!}(e^x - 1)^k + \frac{1}{(k-1)!}(e^x - 1)^{k-1}$$
 и условие (2) также, очевидно, выполнено.
- Докажем, что  $F_k(x)$  — единственный формальный степенной ряд, удовлетворяющий этим условиям.
- Пусть  $G_k(x)$  удовлетворяет условиям (1) и (2).  $H_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} G_k(x) - F_k(x)$ .
- По условию (1) имеем  $H_k'(x) = G_k'(x) - F_k'(x) = kG_k(x) - kF_k(x) = kH_k(x)$ .
- С другой стороны, по условию (2) имеем  $H_k(0) = G_k(0) - F_k(0) = 0$ .
- Но тогда  $H_k(x) = 0$  (в противном случае,  $\nu(H_k') = \nu(H_k) - 1 \neq \nu(kH_k(x))$ ).
- Таким образом,  $G_k(x) = F_k(x)$ . □

Следствие

$$\sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}.$$

Доказательство. 
$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (e^x - 1)^k = e^{e^x - 1}. \end{aligned}$$
 □

## Формальное возведение в степень

### Определение

Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Тогда

- $(1+x)^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha \ln(1+x))$ ;
- если  $A(x) \in \mathbb{R}[[x]]$  и  $A(0) = 1$ , то  $(A(x))^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha \ln(A(x)))$ .

Докажем, что определенная выше операция возведения в степень формального степенного ряда обладает всеми привычными свойствами возведения в степень.

### Утверждение

Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $A, B \in \mathbb{R}[[x]]$ , где  $A(0) = B(0) = 1$ . Тогда

1.  $(A(x))^\alpha (A(x))^\beta = (A(x))^{\alpha+\beta}$ ;
2.  $((A(x))^\alpha)^\beta = (A(x))^{\alpha\beta}$ ;
3.  $(A(x))^\alpha (B(x))^\alpha = (A(x)B(x))^\alpha$ .

## Формальное возведение в степень

Доказательство.

$$\begin{aligned} 1. (A(x))^\alpha (A(x))^\beta &= \exp(\alpha \ln(A(x))) \exp(\beta \ln(A(x))) = \\ &= \exp(\alpha \ln(A(x)) + \beta \ln(A(x))) = \\ &= \exp((\alpha + \beta) \ln(A(x))) = \\ &= (A(x))^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. ((A(x))^\alpha)^\beta &= \exp(\beta \ln(A(x)^\alpha)) = \\ &= \exp(\beta \ln(\exp(\alpha \ln(A(x)))))) = \\ &= \exp(\beta(\alpha \ln(A(x)))) = \\ &= (A(x))^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. (A(x))^\alpha (B(x))^\alpha &= \exp(\alpha \ln(A(x))) \exp(\alpha \ln(B(x))) = \\ &= \exp(\alpha \ln(A(x)) + \alpha \ln(B(x))) = \\ &= \exp(\alpha(\ln(A(x)) + \ln(B(x)))) = \\ &= \exp(\alpha \ln(A(x)B(x))) = \\ &= (A(x)B(x))^\alpha. \end{aligned}$$



## Формальное возведение в степень

### Замечание

Отметим еще несколько свойств, характерных для обычного возведения в степень. Пусть  $A \in \mathbb{R}[[x]]$  и  $A(0) = 1$ . Тогда

- $A(x)^0 = \exp(0 \cdot \ln A(x)) = \exp(0) = 1$ ;
- $A(x)^1 = \exp(1 \cdot \ln A(x)) = \exp(\ln A(x)) = A(x)$ ;
- если  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $A(x)^{\alpha+1} = A(x)^\alpha A(x)^1 = A(x)^\alpha \cdot A(x)$ ,
  - ▶ в частности, при  $n \in \mathbb{N}$  по индукции легко показать, что  $A(x)^n$  — это действительно  $n$ -я степень ряда  $A(x)$ ;
- $A(x)^{-1} \cdot A(x) = A(x)^0 = 1$ ,
  - ▶ то есть  $A(x)^{-1}$  — это действительно ряд, обратный к  $A(x)$ ;
- $(A(x)^{\frac{1}{n}})^n = A(x)^{\frac{1}{n} \cdot n} = A(x)^1 = A(x)$ ,
  - ▶ то есть мы можем считать, что  $\sqrt[n]{A(x)} \stackrel{\text{def}}{=} A(x)^{\frac{1}{n}}$ .

## Биномиальный ряд

### Теорема

Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Тогда  $(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k$ , где  $\binom{\alpha}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha^k}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ .

Доказательство. Пусть  $(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$ . Мы знаем, что  $a_0 = 1$ .

- Заметим, что  $\frac{((1+x)^\alpha)'}{(1+x)^\alpha} = (\ln((1+x)^\alpha))' = (\alpha \ln(1+x))' = \frac{\alpha}{1+x}$ .
- Тогда  $(1+x)((1+x)^\alpha)' = \alpha(1+x)^\alpha$ . При этом,  $\alpha(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \alpha a_k x^k$  и  $(1+x)((1+x)^\alpha)' = (1+x) \sum_{k \geq 1} k a_k x^{k-1} = \sum_{k \geq 0} ((k+1)a_{k+1} + k a_k) x^k$ .
- Приравнивая коэффициенты при  $x^k$  получим, что  $\alpha a_k = (k+1)a_{k+1} + k a_k$  при всех  $k \geq 0$ , откуда  $a_{k+1} = \frac{\alpha-k}{k+1} \cdot a_k$ .
- Тогда, учитывая, что  $a_0 = 1$ , по индукции получаем, что  $a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ . □

### Замечание

- Доказанная выше формула для  $(1+x)^\alpha$  называется **биномиальным рядом**.
- В частности, эта теорема означает, что равенство  $\sqrt{1-4x} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4x)^k$ , которое мы использовали для чисел Каталана, имеет смысл и с точки зрения формальных степенных рядов.

## Многомерные производящая функции

- Если комбинаторная величина задается несколькими целыми неотрицательными параметрами (индексами), то для её задания удобно использовать *производящую функцию нескольких переменных* или *многомерную* производящую функцию.
- Пусть  $a: \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$ . *Многомерной производящей функцией* величины  $a(i_1, \dots, i_n)$  называется выражение

$$A(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} a(i_1, \dots, i_n) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

- Многомерную производящую функцию можно рассматривать как формальный степенной ряд от нескольких переменных (т. е. как элемент кольца  $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]]$ ).
- Также можно говорить о сходимости такого ряда в некоторой окрестности нуля. Тогда получится функция от  $n$  переменных, действующая из некоторого подмножества  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}$ .

## Многомерные производящая функции: примеры

1. Двумерная производящая функция для биномиальных коэффициентов

$$\sum_{n,k \geq 0} C_n^k x^k y^n = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \right) y^n = \sum_{n \geq 0} (1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-xy}.$$

2. Симметричная форма записи биномиальных коэффициентов

$$\sum_{m,n \geq 0} C_{m+n}^m x^m y^n = \sum_{k \geq 0} \sum_{m+n=k} C_{m+n}^m x^m y^n = \sum_{k \geq 0} (x+y)^k = \frac{1}{1-x-y}.$$

3. Разбиения целочисленных векторов

- Пусть  $N(a, b)$ , где  $a, b \in \mathbb{N}_0$ , — число разбиений вектора  $(a, b) \in \mathbb{N}_0^2$  на различные векторы, координаты которых отличаются на 1.

- Например,  $(6, 4) = (1, 0) + (5, 4)$ ;

$$(6, 4) = (2, 1) + (4, 3);$$

$$(6, 4) = (0, 1) + (1, 0) + (2, 1) + (3, 2).$$

- Следовательно,  $N(6, 4) = 3$ .

- Тогда  $\sum_{a,b \geq 0} N(a, b) u^a v^b = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + u^{k-1} v^k)(1 + u^k v^{k-1})$ .

Доказательство.  $N(a, b)$  — число способов представить  $u^a v^b$  в виде произведения различных мономов вида  $u^{k-1} v^k$  и  $u^k v^{k-1}$ .

А это и есть коэффициент при  $u^a v^b$  в правой части. □



## Тождество Гаусса-Якоби

### Теорема (тождество Гаусса-Якоби)

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u^{k-1}v^k)(1 + u^k v^{k-1})(1 - u^k v^k) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} u^{\frac{q(q+1)}{2}} v^{\frac{q(q-1)}{2}}.$$

- Ниже мы дадим комбинаторное доказательство тождества Гаусса-Якоби.
- Для этого изучим свойства чисел  $N(a, b)$ .
- Каждое разбиение вектора  $(a, b)$  будем записывать в следующем виде:

$$(a, b) = (k_1 + 1, k_1) + \dots + (k_s + 1, k_s) + (l_1, l_1 + 1) + \dots + (l_t, l_t + 1),$$

где  $k_1 > \dots > k_s \geq 0$  и  $l_1 > \dots > l_t \geq 0$ .

- Такое разбиение будем обозначать через  $(k_1, \dots, k_s | l_1, \dots, l_t)$ .
- Например, разбиения вектора  $(6, 4)$  обозначим  $(4, 0 |)$ ,  $(3, 1 |)$ ,  $(2, 1, 0 | 0)$ .
- Докажем несколько лемм.

## Свойства разбиений целочисленных векторов

### Лемма 1

$$N(a, b) > 0 \iff a + b \geq (a - b)^2.$$

Доказательство. Пусть, не умаляя общности,  $a \geq b$ .

“ $\Rightarrow$ ”: Рассмотрим разбиение  $(k_1, \dots, k_s | l_1, \dots, l_t)$  вектора  $(a, b)$ .

- Очевидно, что  $a - b = s - t \geq 0$ .
- $a + b = (2k_1 + 1) + \dots + (2k_s + 1) + (2l_1 + 1) + \dots + (2l_t + 1) \geq 1 + 3 + \dots + (2s - 1) = s^2 \geq (s - t)^2 = (a - b)^2$ .

“ $\Leftarrow$ ”: Пусть  $q = a - b$ .

- Если  $q = 0$ , то  $(a, a) = (a, a - 1) + (0, 1)$ . Т. е.  $(a - 1 | 0)$  — разбиение  $(a, b)$ .
- Если  $q > 0$ , то рассмотрим разбиение  $(q - 1, q - 2, \dots, 0 |)$ .
  - ▶ Это разбиение вектора  $(a', b')$ , где  $a' - b' = a - b \geq 0$ .
  - ▶ Заметим, что  $a' + b' = 1 + 3 + \dots + (2q - 1) = q^2 \leq a + b$ .
  - ▶ Тогда  $a = a' + m$  и  $b = b' + m$ , где  $m \geq 0$ .
  - ▶ Следовательно,  $(q - 1 + m, q - 2, \dots, 0 |)$  — разбиение  $(a, b)$ . □

## Свойства разбиений целочисленных векторов

- Далее, мы будем рассматривать только векторы, для которых  $N(a, b) > 0$ .
- Очевидно, что число  $a + b - (a - b)^2$  всегда четно.
- Введем обозначения  $m = \frac{a+b-(a-b)^2}{2}$  и  $q = a - b$ . Тогда  $m \in \mathbb{N}_0$  и  $q \in \mathbb{Z}$ .
- Заметим, что числа  $a$  и  $b$  однозначно выражаются через  $m$  и  $q$ .

Действительно

$$\blacktriangleright a = \frac{(a+b)+(a-b)}{2} = \frac{2m+q^2+q}{2} = m + \frac{q(q+1)}{2};$$

$$\blacktriangleright b = \frac{(a+b)-(a-b)}{2} = \frac{2m+q^2-q}{2} = m + \frac{q(q-1)}{2}.$$

- Введем обозначение

$$t(m, q) \stackrel{\text{def}}{=} N\left(m + \frac{q(q+1)}{2}, m + \frac{q(q-1)}{2}\right).$$

### Лемма 2

При всех  $m \in \mathbb{N}_0$  и  $q \in \mathbb{Z}$  выполнено равенство  $t(m, q) = t(m, 0)$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать, что при  $q > 0$  выполнено равенство  $t(m, q) = t(m, q-1)$  (при  $q < 0$  все симметрично).

## Свойства разбиений целочисленных векторов: зависимость только от $m$

- Пусть  $T(m, q)$  — множество всех разбиений  $(m + \frac{q(q+1)}{2}, m + \frac{q(q-1)}{2})$ .
- Построим биекцию между  $T(m, q)$  и  $T(m, q - 1)$ :

$$\varphi(k_1, \dots, k_s | l_1, \dots, l_t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (k_1 - 1, \dots, k_s - 1 | l_1 + 1, \dots, l_t + 1, 0), & k_s > 0 \\ (k_1 - 1, \dots, k_{s-1} - 1 | l_1 + 1, \dots, l_t + 1), & k_s = 0. \end{cases}$$

- Обозначим через  $a', b', s', t', m', q'$  характеристики получившегося разбиения, аналогичные  $a, b, s, t, m$  и  $q$  соответственно.
- Заметим, что в каждом из случаев  $s' - t' = s - t - 1$ , т. е.  $q' = q - 1$ .
- Также легко видеть, что во всех случаях  $a' + b' = (a + b) - 2s + 2t + 1$ , откуда  $m' = \frac{a'+b'-(a'-b')^2}{2} = \frac{a+b-2q+1-(q-1)^2}{2} = \frac{a+b-q^2}{2} = m$ .
- Наконец,  $\varphi$  — биекция, поскольку можно построить обратное отображение:

$$\psi(k_1, \dots, k_s | l_1, \dots, l_t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (k_1 + 1, \dots, k_s + 1, 0 | l_1 - 1, \dots, l_t - 1), & l_t > 0 \\ (k_1 + 1, \dots, k_s + 1 | l_1 - 1, \dots, l_{t-1} - 1), & l_t = 0. \end{cases}$$



## Связь разбиений чисел и векторов

### Лемма 3

При всех  $m \in \mathbb{N}_0$  выполнено равенство  $t(m, 0) = p(m)$ .

**Доказательство.** Нужно доказать, что число разбиений вектора  $(m, m)$  равно числу разбиений  $m$ .

- Построим биекцию между этими разбиениями.
- Рассмотрим произвольную диаграмму Юнга из  $m$  клеток.
- Проведем в этой диаграмме диагональ из левого нижнего угла направо-вверх. Пусть в ней  $s$  клеток.
  - ▶ Пусть  $k_i$  — количество клеток в  $i$ -й строке, находящихся правее выделенной диагонали.
  - ▶ Аналогично,  $l_j$  — количество клеток в  $j$ -м столбце, находящихся выше выделенной диагонали.
  - ▶ Тогда  $(k_1, \dots, k_s | l_1, \dots, l_t)$  — разбиение вектора  $(m, m)$ .
- К этому преобразованию легко построить обратное, поэтому оно — биекция. □

## Доказательство тождества Гаусса-Якоби

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \prod_{k \geq 1} (1 + u^{k-1}v^k)(1 + u^k v^{k-1}) &= \sum_{a, b \geq 0} N(a, b) u^a v^b = \\
 &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t(m, q) u^{m + \frac{q(q+1)}{2}} v^{m + \frac{q(q-1)}{2}} = \\
 &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m \geq 0} p(m) u^m v^m \right) u^{\frac{q(q+1)}{2}} v^{\frac{q(q-1)}{2}} = \\
 &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - u^k v^k} \sum_{q=-\infty}^{\infty} u^{\frac{q(q+1)}{2}} v^{\frac{q(q-1)}{2}}.
 \end{aligned}$$

Домножив обе части равенства на  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - u^k v^k)$  получим

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u^{k-1}v^k)(1 + u^k v^{k-1})(1 - u^k v^k) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} u^{\frac{q(q+1)}{2}} v^{\frac{q(q-1)}{2}}.$$



## Доказательство пентагональной формулы Эйлера через тождество Гаусса-Якоби

Следствие (пентагональная формула Эйлера)

$$\prod_{k \geq 1} (1 - x^k) = 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left( x^{\frac{k(3k-1)}{2}} + x^{\frac{k(3k+1)}{2}} \right).$$

Доказательство.

- Подставим в тождество Гаусса-Якоби  $u = -t, v = -t^2$ .
- В левой части получим  $\prod_{k \geq 1} (1 - t^{3k-2})(1 - t^{3k-1})(1 - t^{3k})$ .

- В правой части: 
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{\frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}} t^{k(k+1)/2} t^{k(k-1)} =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k t^{k(3k-1)/2} = 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left( x^{\frac{k(3k-1)}{2}} + x^{\frac{k(3k+1)}{2}} \right).$$

□

## Рекуррентная формула для числа разбиений

Теорема

$$p(n) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \left( p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) \right).$$

Замечание

- Здесь мы считаем, что  $p(m) = 0$  при  $m < 0$ . То есть рассматриваются только те слагаемые, где  $p$  берется от неотрицательных чисел.

- Если развернуть эту формулу, то получится

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \dots$$

Доказательство. Заметим, что

$$1 = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k} \prod_{k \geq 1} (1-x^k) = \left( \sum_{k \geq 0} p(k)x^k \right) \left( 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left( x^{\frac{k(3k-1)}{2}} + x^{\frac{k(3k+1)}{2}} \right) \right).$$

- Раскрыв скобки в правой части и рассмотрев коэффициент при  $x^n$  получим:

$$0 = p(n) + \sum_{k \geq 1} (-1)^k \left( p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) \right).$$

□