Дискретная математика

Глава 6. Цепи и антицепи

А. В. Пастор

20.03.2023

Цепи и антицепи

- Напомним, что частично упорядоченным множеством называется упорядоченная пара $(X, \succ)$, где X — множество и $\succ$ — отношение частичного порядка на X.
- Для определенности будем считать, что $\succ$ — отношение строгого частичного порядка, то есть оно иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Определение

Пусть $(M, \succ)$ — конечное частично упорядоченное множество.

- *Цепью* в M называется линейно упорядоченное подмножество $X \subset M$
  - т. е. элементы X образуют монотонную последовательность

$$x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_m.$$

- *Антицепью* в M называется подмножество $Y \subset M$, любые два различных элемента которого *несравнимы*
  - т. е. такие $y_1, y_2, \ldots, y_n$, что $y_i \not\succ y_j$ при $i \neq j$.

Цепи и антицепи с точки зрения орграфов

Замечание

- Пусть $(M, \succ)$ — конечное частично упорядоченное множество.
- Построим соответствующий ему орграф D_M следующим образом:
  - $V(D_M) = M$;
  - $A(D_M) = \{xy \mid x \succ y\}$.
- Заметим, что тогда
  - D_M — орграф без циклов;
  - цепь в M — это простой ориентированный путь в D_M;
  - антицепь в M — это независимое множество в D_M.
- Обратно, любой орграф D без циклов задает отношение частичного порядка на множестве своих вершин.
  - Для этого нужно построить *транзитивное замыкание* орграфа D, то есть провести стрелки, соединяющие начало любого простого пути в D с его концом.

Далее, нас будут интересовать разбиения M на наименьшее возможное число цепей и на наименьшее возможное число антицепей.

Теорема Мирского

Теорема (Мирский, 1971)

Длина максимальной цепи в M равна минимальному количеству антицепей, на которые разбивается M.

Доказательство.

- Пусть m — длина максимальной цепи в M;
- k — минимальное число антицепей, на которые разбивается M.
- Неравенство $k \geq m$ тривиально, поскольку цепь и антицепь могут иметь не более одного общего элемента.
- Докажем, что $k \leq m$. Для этого нужно построить разбиение множества M на m антицепей.
  - Пусть $\ell(x)$ — длина максимальной цепи с началом в x.
  - Для каждого $i \in [1..m]$ введем обозначение $Y_i \overset{\text{def}}{=} \{x \in M \mid \ell(x) = i\}$.
  - Легко видеть, что $Y_1, \dots, Y_m$ — антицепи в M, причем каждый элемент M принадлежит ровно одной из этих антицепей.
  - Следовательно, $Y_1, \dots, Y_m$ — разбиение M на m антицепей. $\square$

Теорема Мирского и раскраски графов

Замечание

- Наряду с орграфом D_M, можно также рассмотреть соответствующий неориентированный граф $G_M \stackrel{\mathrm{def}}{=} \underline{D_M}$.
- Заметим, что тогда
  - цепи в M соответствуют кликам в графе G_M;
  - антицепи в M соответствуют независимым множествам в G_M.
- Тогда длина максимальной цепи в M равна $\omega(G_M)$;
- минимальное число антицепей, на которые разбивается M, равно $\chi(G_M)$.
- То есть теорема Мирского утверждает, что $\chi(G_M) = \omega(G_M)$.
- Легко видеть, что аналогичное равенство верно и для любого индуцированного подграфа G_M.

Определение

Граф G называется *совершенным*, если для любого его индуцированного подграфа H выполнено равенство $\chi(H) = \omega(H)$.

- То есть из теоремы Мирского следует, что граф G_M — совершенный.

Теорема Дилуорса

Теорема (Дилуорс, 1950)

Размер максимальной антицепи в M равен минимальному количеству цепей, на которые разбивается M.

Замечание

Эта теорема уже была доказана в курсе теории графов, как следствие теоремы Галлаи-Мильграма. Здесь мы приведем другое доказательство теоремы Дилуорса.

Доказательство. Пусть n — размер максимальной антицепи в M; k — минимальное число цепей, на которые разбивается M.

- Как и в предыдущей теореме, неравенство $k \geq n$ тривиально, поскольку цепь и антицепь могут иметь не более одного общего элемента.
- Докажем, что $k \leq n$. Для этого нужно построить разбиение множества M на n цепей.
- Пусть $M = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ и $D = D_M$ — соответствующий орграф.

Доказательство теоремы Дилуорса

- "Удвоим" орграф D. Т. е. построим следующий двудольный граф H:
  - каждой вершине $u_i \in M$ ставим в соответствие пару вершин a_i, b_i;
  - пусть $A = \{a_1, \dots, a_p\}$, $B = \{b_1, \dots, b_p\}$, $V(H) = A \cup B$;
  - если в D есть стрелка $u_i u_j$, то проводим в H ребро $a_i b_j$.
- Можно считать, что b_i — это "*вход*" в вершину u_i, а a_i — "*выход*".
- Докажем, что $\beta(H) \geq p - n$.
  - Действительно, пусть W — вершинное покрытие в H.
  - Рассмотрим подмножество $W' \subset M$, состоящее из элементов, соответствующих вершинам из W.
  - Тогда W' — вершинное покрытие в D.
  - Следовательно, $M \setminus W'$ — независимое множество, т. е. антицепь в M.
- По теореме Кёнига $\alpha'(H) = \beta(H) \geq p - n$.
- Тогда в G есть паросочетание S, где $|S| \geq p - n$.
- Пусть F — множество стрелок D, соответствующих ребрам из S.
- Рассмотрим подграф $D' = (M, F)$ орграфа D.
- В нем p вершин и не менее $p - n$ стрелок.

Завершение доказательства теоремы Дилуорса

- Все компоненты слабой связности D' — простые ориентированные пути.
  - Компонента не может быть циклом, т. к. в D циклов нет.
- Эти пути являются цепями в M и задают разбиение M на цепи.
- Путей не более n, т. к. если в пути ℓ стрелок, то в нем $\ell + 1$ вершина. $\square$

Замечание

Мы вывели теорему Дилуорса из теоремы Кёнига. Можно сделать и наоборот. Давайте выведем теорему Кёнига из теоремы Дилуорса.

- Пусть $H = (V_1, V_2, E)$ — двудольный граф.
- Обозначим через D ориентацию графа H, в которой все стрелки ориентированны из V_1 в V_2.
- Орграф D задает отношение частичного порядка на множестве $V = V_1 \cup V_2$.
- Очевидно, что любая цепь в получившемся частично упорядоченном множестве состоит из не более, чем двух вершин. Более того, цепи из двух элементов — это стрелки орграфа D.

О связи теорем Дилуорса и Кёнига

- Таким образом, любое разбиение V на непересекающиеся цепи состоит из нескольких не имеющих общих концов стрелок (эти стрелки задают некоторое паросочетание в H) и отдельных вершин.
- Следовательно, минимальное количество цепей, на которые можно разбить V, равно $v(G) - \alpha'(G)$.
- С другой стороны, подмножество $W \subset V$ является антицепью если и только если W является независимым множеством в графе H.
- Таким образом, размер максимальной антицепи равен $\alpha(H) = v(H) - \beta(H)$.
- Тогда по теореме Дилуорса $v(H) - \alpha'(H) = v(H) - \beta(H)$, откуда $\alpha'(H) = \beta(H)$. $\square$

Применение теоремы Дилуорса

Теорема (Эрдёш-Секереш)

Из любой последовательности различных вещественных чисел длины $mn+1$ можно выбрать либо возрастающую подпоследовательность из $m+1$ числа, либо убывающую подпоследовательность из $n+1$ числа.

Доказательство.

- Пусть $L = (x_1, x_2, \dots, x_{mn+1})$ — последовательность из условия.
- Рассмотрим множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{mn+1}\}$ и введем на нем следующее отношение порядка:
  - $a \succ b$, если и только если $a > b$ и число a стоит левее, чем b.
- Тогда любая убывающая подпоследовательность в L является цепью, а любая возрастающая подпоследовательность — антицептю.
- Предположим, что возрастающей подпоследовательности из $m+1$ числа в L нет. Тогда размер максимальной антицепи не более m.
- По теореме Дилуорса, X можно разбить на не более, чем m цепей. Одна из них будет иметь длину хотя бы $n+1$ и задаст искомую убывающую подпоследовательность. $\square$

Системы подмножеств и симметричные цепи

Определение

- Пусть X — конечное множество, $|X| = n$ и $M = \mathcal{P}(X)$.
- Зададим на M отношение частичного порядка $A \subset B$.
- Цепь $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ в $(M, \subset)$ называется *симметричной*, если выполняются следующие два условия:

  1. $|A_1| + |A_k| = n$;
  2. $\forall i \in [1..k-1]\,(|A_{i+1}| = |A_i| + 1)$.

Замечание

- В частности, тогда $|A_i| + |A_{k+1-i}| = n$ при всех $i \in [1..k]$.
- Элементы множества M можно записывать как последовательности нулей и единиц (т.е. элементы из $\{0,1\}^n$).

Системы подмножеств и симметричные цепи

- Пусть $A = (a_1, \dots, a_n)$ и $B = (b_1, \dots, b_n)$ — элементы $\{0,1\}^n$.
  - Тогда $A \prec B$, если $\forall i\, (a_i \le b_i)$ и хотя бы одно из неравенств строгое.
  - Симметричная цепь в $\{0,1\}^n$ — это такая последовательность упорядоченных наборов нулей и единиц, в которой каждый следующий набор получается из предыдущего заменой одного нуля на единицу и суммарное число единиц в первом и последнем наборе равно n.

Теорема

Множество M можно разбить на $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ симметричных цепей.

Доказательство. Индукция по n.

База: при $n = 1$ утверждение очевидно.

Переход $(n-1 \to n)$: пусть $X = \{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$.

- Рассмотрим множество $X' = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. По индукционному предположению, $\mathcal{P}(X')$ можно разбить на симметричные цепи.
- Пусть $C = \{A_1, \dots, A_{k-1}, A_k\}$, где $A_1 \subset \dots \subset A_{k-1} \subset A_k$ — одна из цепей в разбиении $\mathcal{P}(X')$ на симметричные цепи.

Системы подмножеств и симметричные цепи

- Тогда рассмотрим следующие цепи в $\mathcal{P}(X)$:
  - C_i': $A_1 \subset \ldots \subset A_{k-1} \subset A_k \subset A_k \cup \{x_n\}$;
  - C_i'': $A_1 \cup \{x_n\} \subset \ldots \subset A_{k-1} \cup \{x_n\}$ (в случае $k > 1$).
- Легко видеть, что цепи C_i' и C_i'' и все цепи такого вида задают разбиение множества $\mathcal{P}(X)$.
- Количество цепей равно $C_n^{[\frac{n}{2}]}$, поскольку каждая симметричная цепь в $\mathcal{P}(X)$ содержит ровно одно подмножество мощности $[\frac{n}{2}]$. $\square$

Теорема Шпернера

Теорема (Шпернер, 1928)

Пусть X *— конечное множество,* $|X| = n$ *и* $M = \mathcal{P}(X)$*. Тогда размер максимальной антицепи в* M *равен* $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

Доказательство.

- Мы доказали, что M можно разбить на $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ симметричных цепей.
- Следовательно, по теореме Дилуорса, размер максимальной антицепи в M не превосходит $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.
- С другой стороны, антицепь размера $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ в M есть: это все подмножества мощности $[\frac{n}{2}]$. □

- На самом деле, этот результат является частным случаем более общей теоремы.
- В ней мы, в частности, получим другое доказательство теоремы Шпернера.

Неравенство Любелла — Ямамото – Мешалкина

Теорема (Любелл, 1966)

Пусть X *— конечное множество,* $|X| = n$, $M = \mathcal{P}(X)$ *и* $\mathcal{F}$ *— антицепь в* M*. Тогда*

$$\sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{C_n^{|A|}} \le 1.$$

Доказательство.

- Рассмотрим все возможные *максимальные цепи* в M. То есть последовательности подмножеств вида

$$\varnothing = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \ldots \subsetneq A_n = X.$$

- Всего таких цепей $n!$. Каждое подмножество $A \subset X$ содержится ровно в $|A|!(n-|A|)!$ максимальных цепях.
- При этом, каждая максимальная цепь пересекает антицепь $\mathcal{F}$ максимум по одному элементу.
- Следовательно, $\sum_{A\in\mathcal{F}} |A|!(n-|A|)! \le n!$.
- Сократив это неравенство на $n!$, получим требуемое. $\square$