

# Дискретная математика

## Глава 4. Разбиения чисел

А. В. Пастор

10.10.2022

## Упорядоченные и неупорядоченные разбиения

### Определение

- *Разбиением* натурального числа  $n$  на  $m$  слагаемых называется представление  $n$  в виде  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{N}$ .
- Разбиения называются *упорядоченными*, если порядок слагаемых имеет значение, и *неупорядоченными* в противном случае.

### Пример

Есть три упорядоченных разбиения числа 4 на три слагаемых:

$$4 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2.$$

Но неупорядоченное разбиение только одно.

### Замечание

- Строго говоря, упорядоченное разбиение — это последовательность натуральных чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , сумма членов которой равна  $n$ .
- Неупорядоченное разбиение — это класс эквивалентности, где эквивалентными считаются последовательности, отличающиеся лишь порядком членов.

## Теорема

1. Количество упорядоченных разбиений числа  $n$  на  $m$  слагаемых равно  $C_{n-1}^{m-1}$ .
2. Количество упорядоченных разбиений числа  $n$  равно  $2^{n-1}$ .

## Доказательство.

1. Нужно найти количество натуральных решений уравнения  $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ .
  - Выложим в ряд  $n$  шариков и расставим между ними  $m - 1$  перегородку.
  - Это можно сделать  $C_{n-1}^{m-1}$  способами.
  - Шарiki разобьются на  $m$  групп: пусть в  $i$ -й группе  $x_i$  шариков.
  - Получаем биекцию между решениями и расстановками перегородок.
2.  $\sum_{m=1}^n C_{n-1}^{m-1} = 2^{n-1}$ . □

# Упорядоченные разбиения и числа Фибоначчи

## Определение

*Числа Фибоначчи* — это последовательность  $F_n$ , задаваемая следующими условиями:  $F_1 = F_2 = 1$  и  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  при  $n > 1$ .

## Теорема

*Количество упорядоченных разбиений числа  $n$  на нечетные слагаемые равно  $F_n$ .*

Доказательство. Индукция по  $n$ .

База: при  $n = 1$  и  $n = 2$  утверждение очевидно.

Переход ( $n - 1, n \rightarrow n + 1$ ): Пусть  $n + 1 = x_1 + \dots + x_{m-1} + x_m$  — разбиение на нечетные слагаемые.

► Рассмотрим два случая:  $x_m = 1$  и  $x_m \geq 3$ .

1°  $x_m = 1$ . Тогда  $n = x_1 + \dots + x_{m-1}$ . Таких разбиений  $F_n$ .

2°  $x_m \geq 3$ . Тогда  $n - 1 = x_1 + \dots + x_{m-1} + (x_m - 2)$ . Таких разбиений  $F_{n-1}$ .

► Итого, получаем  $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$  разбиений. □

# Неупорядоченные разбиения и диаграммы Юнга

## Определение

- $p_m(n)$  — количество неупорядоченных разбиений числа  $n$  на  $m$  слагаемых;
- $p(n)$  — количество неупорядоченных разбиений числа  $n$ .

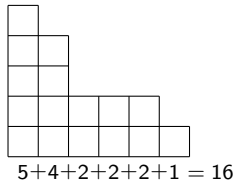
## Стандартная форма записи

Слагаемые неупорядоченного разбиения обычно записывают в невозрастающем порядке:

$$n = x_1 + \dots + x_m, \quad \text{где} \quad x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_m > 0.$$

## Диаграммы Юнга

- Каждому разбиению числа  $n$  соответствует следующая диаграмма из  $n$  клеток.
- Столбцы диаграммы соответствуют слагаемым. Количество столбцов равно  $m$ .



## Еще один способ записи разбиения

### Теорема

1. Количество решений уравнения  $t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \dots + nt_n = n$  (1) в целых неотрицательных числах равно  $p(n)$ .
2. Количество решений уравнения (1), удовлетворяющих условию  $t_1 + \dots + t_n = m$ , равно  $p_m(n)$ .

Доказательство. Пусть  $n = x_1 + \dots + x_m$  — разбиение числа  $n$ .

- Обозначим через  $t_k$  количество слагаемых в этом разбиении, равных  $k$ .
- Получим решение уравнения (1).
- Аналогично, каждому решению  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$  уравнения (1) соответствует разбиение  $n$ , в котором ровно  $t_k$  слагаемых, равных  $k$ .
- При этом, количество слагаемых в разбиении будет равно  $t_1 + \dots + t_n$ .  $\square$

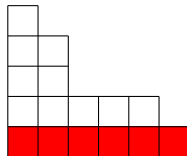
# Рекуррентная формула для числа разбиений

## Теорема

$$p_m(n) = p_m(n - m) + p_{m-1}(n - m) + \dots + p_1(n - m).$$

## Доказательство.

- Рассмотрим диаграмму Юнга с  $n$  клетками и  $m$  столбцами.
- Удалим нижнюю строку.
- Получим диаграмму с  $n - m$  клетками и  $k \leq m$  столбцами.



## Следствие 1

Количество неупорядоченных разбиений числа  $n - m$  на не более чем  $m$  слагаемых равно  $p_m(n)$ .

# Рекуррентная формула для числа разбиений

## Следствие 2

$$p_m(n) = p_m(n - m) + p_{m-1}(n - 1).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} p_m(n) &= p_m(n - m) + (p_{m-1}(n - m) + \dots + p_1(n - m)) = \\ &= p_m(n - m) + p_{m-1}(n - 1). \end{aligned}$$



## Замечание

- Отметим, что  $p_1(n) = 1$  при всех  $n$ .
- При помощи доказанных выше рекуррентных соотношений, можно получить явные формулы для  $p_m(n)$  при малых  $m$ .
- Мы сделаем это для  $m = 2$  и  $m = 3$ .



# Явные формулы для малых $m$

## Определение

Пусть  $x \in \mathbb{R}$ .

- Через  $[x]$  обозначается **целая часть** числа  $x$ , т. е, наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .
- Через  $\{x\}$  обозначается **дробная часть** числа  $x$ , т. е,  $\{x\} \stackrel{\text{def}}{=} x - [x]$ .

## Теорема (де Морган)

1.  $p_2(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ;
2.  $p_3(n) = \left\lfloor \frac{n^2+3}{12} \right\rfloor$ .

Доказательство. Индукция по  $n$ .

1. База: при  $n = 1$  и  $n = 2$  утверждение очевидно.

Переход ( $n - 2 \rightarrow n$ ):

$$p_2(n) = p_2(n - 2) + p_1(n - 1) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n-2}{2} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

## Явные формулы для малых $m$

2. База: при  $n = 1$ ,  $n = 2$  и  $n = 3$  утверждение очевидно.

Переход ( $n - 3 \rightarrow n$ ):

$$\begin{aligned} p_3(n) &= p_3(n-3) + p_2(n-1) = \\ &= \left[ \frac{(n-3)^2+3}{12} \right] + \left[ \frac{n-1}{2} \right] = \\ &= \left[ \frac{(n^2-6n+12)+(6n-6)}{12} \right] = \\ &= \left[ \frac{n^2+6}{12} \right] = \\ &= \left[ \frac{n^2+3}{12} \right]. \end{aligned}$$

- Нужно проверить подсвеченные красным равенства.
- Для проверки первого из них, нам понадобится следующая лемма.

Лемма

$$[x] + [y] = [x + y] \Leftrightarrow \{x\} + \{y\} < 1.$$

Доказательство.

$$x + y = ([x] + \{x\}) + ([y] + \{y\}) = ([x] + [y]) + (\{x\} + \{y\}).$$



## Явные формулы для малых $m$

Вернемся к доказательству теоремы.

- Здесь мы будем пользоваться тем, что точный квадрат может быть сравним только с 0 или 1 по модулям 3 и 4.

$$2.1. \left[ \frac{(n-3)^2+3}{12} \right] + \left[ \frac{n-1}{2} \right] = \left[ \frac{(n^2-6n+12)+(6n-6)}{12} \right].$$

Нужно доказать, что  $\left\{ \frac{(n-3)^2+3}{12} \right\} + \left\{ \frac{n-1}{2} \right\} < 1$ .

- При  $n \not\equiv 2$ :  $\left\{ \frac{n-1}{2} \right\} = 0$  и  $\left\{ \frac{(n-3)^2+3}{12} \right\} < 1$ .
- При  $n \equiv 2$ : пусть  $n = 2k$ , тогда  $\left\{ \frac{n-1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$  и  $\left\{ \frac{(n-3)^2+3}{12} \right\} = \left\{ \frac{4k^2-12k+12}{12} \right\} = \left\{ \frac{k^2}{3} \right\} \leq \frac{1}{3}$ .

$$2.2. \left[ \frac{n^2+6}{12} \right] = \left[ \frac{n^2+3}{12} \right].$$

Нужно доказать, что числа  $\frac{n^2+4}{12}$ ,  $\frac{n^2+5}{12}$ ,  $\frac{n^2+6}{12}$  не целые.

- Но  $n^2 + 4 \not\equiv 0 \pmod{3}$ , т. к.  $n^2 \not\equiv 2 \pmod{3}$ ;
- $n^2 + 5 \not\equiv 0 \pmod{4}$ , т. к.  $n^2 \not\equiv 3 \pmod{4}$ ;
- $n^2 + 6 \not\equiv 0 \pmod{4}$ , т. к.  $n^2 \not\equiv 2 \pmod{4}$ .



## О явной формуле в общем случае

### Теорема

- $p_m(n) = \frac{n^{m-1}}{(m-1)!m!} + c_{m-2}(m, n)n^{m-2} + \dots + c_1(m, n)n + c_0(m, n)$ , где коэффициенты  $c_k(m, n)$  зависят только от класса вычетов  $n$  по модулю  $m!$ .
- В частности, если  $n \equiv n_0 \pmod{m!}$  при фиксированном  $n_0$ , то  $p_m(n)$  является многочленом степени  $m - 1$  от переменной  $n$ . (б/д)

### Замечание

- Вспомним, что количество упорядоченных разбиений числа  $n$  на  $m$  слагаемых равно  $C_{n-1}^{m-1}$ .
- При фиксированном  $m$  это также многочлен от  $n$  со старшим членом  $\frac{n^{m-1}}{(m-1)!}$ .
- Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_m(n)}{C_{n-1}^{m-1}} = \frac{1}{m!}$ .
- Это означает, что “почти все” разбиения  $n$  на  $m$  слагаемых состоят из различных слагаемых.

### Теорема

Количество разбиений числа  $n$  на  $m$  различных слагаемых равно  $p_m\left(n - \frac{m(m-1)}{2}\right)$ .

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Рассмотрим числа  $y_i = x_i - m + i$ .
  - ▶  $y_i - y_{i+1} = (x_i - m + i) - (x_{i+1} - m + i + 1) = x_i - x_{i+1} - 1 \geq 0$ ;
  - ▶ следовательно,  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_m = x_m > 0$ ;
  - ▶  $y_1 + y_2 + \dots + y_m =$   
 $= x_1 + x_2 + \dots + x_m - ((m-1) + (m-2) + \dots + 1) = n - \frac{m(m-1)}{2}$ .
- Итак, каждому разбиению  $n$  на  $m$  различных слагаемых поставили в соответствие разбиение  $n - \frac{m(m-1)}{2}$  на  $m$  слагаемых.
- Очевидно, что это биекция.



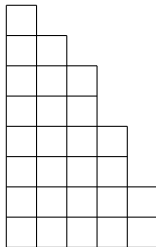
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



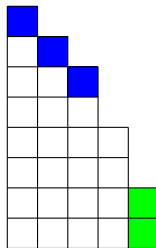
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



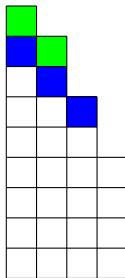
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.





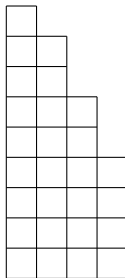
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



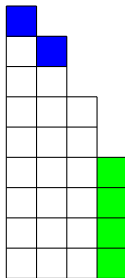
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



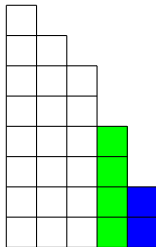
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



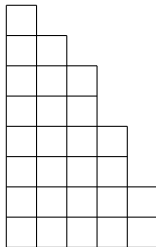
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



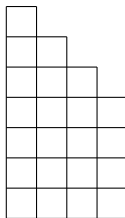
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



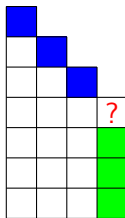
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



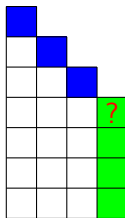
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



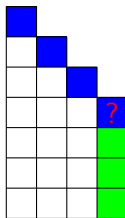
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.





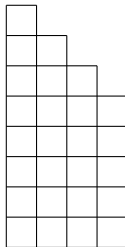
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



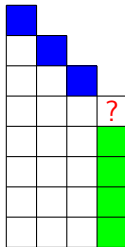
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



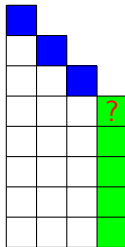
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



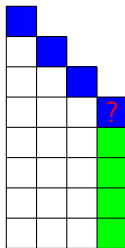
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



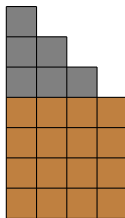
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



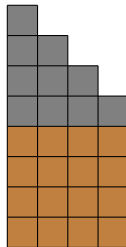
## Пентагональная формула Эйлера

### Теорема (пентагональная формула Эйлера)

Если число  $n$  не представимо в виде  $\frac{1}{2}(3k^2 \pm k)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. В противном случае, эти количества отличаются на 1.

Доказательство.

- Пусть  $n = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ , где  $x_1 > x_2 > \dots > x_m > 0$ .
- Введем обозначения:  $k \stackrel{\text{def}}{=} \max\{i \mid x_i = x_1 - i + 1\}$  и  $\ell \stackrel{\text{def}}{=} x_m$ .
  - Если  $k \geq \ell$ , убираем  $x_m$  и увеличиваем  $x_1, \dots, x_\ell$  на 1.
  - Если  $k < \ell$ , уменьшаем  $x_1, \dots, x_k$  на 1 добавляем  $x_{m+1} = k$ .
- Проблема:**  $k = m = \ell$  или  $k = m = \ell - 1$ . В этих случаях ни одно из указанных преобразований сделать невозможно.
  - При  $k = m = \ell$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 - k)$ .
  - При  $k = m = \ell - 1$  получаем  $n = k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(3k^2 + k)$ .
- В каждом из случаев есть ровно одна такая диаграмма.



Почему предыдущая теорема называется **пентагональная формула Эйлера**?

- Дело в том, что числа вида  $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$  — это так называемые **пятиугольные числа**.
- Формально,  $k$ -е пятиугольное число — это сумма первых  $k$  членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:  
$$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2).$$
- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.
- Числа вида  $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$  получаются похожим образом:  
$$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1),$$
 но для них нет столь красивого геометрического представления.
- Аналогично,  $n$ -угольные числа — это суммы первых  $k$  членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью  $n - 2$ .
- Наиболее известны треугольные числа:  
$$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + k.$$

$$\frac{1}{2}(3 \cdot 1^2 - 1) = 1.$$

## О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется **пентагональная формула Эйлера**?

- Дело в том, что числа вида  $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$  — это так называемые **пятиугольные числа**.

- Формально,  $k$ -е пятиугольное число — это сумма первых  $k$  членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:

$$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2).$$

- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.

- Числа вида  $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$  получаются похожим образом:  $\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1)$ , но для них нет столь красивого геометрического представления.

- Аналогично,  $n$ -угольные числа — это суммы первых  $k$  членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью  $n - 2$ .

- Наиболее известны треугольные числа:

$$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + k.$$



$$\frac{1}{2}(3 \cdot 2^2 - 1) = 1 + 4.$$



## О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется **пентагональная формула Эйлера**?

- Дело в том, что числа вида  $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$  — это так называемые **пятиугольные числа**.

- Формально,  $k$ -е пятиугольное число — это сумма первых  $k$  членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:

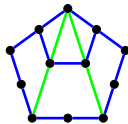
$$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2).$$

- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.

- Числа вида  $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$  получаются похожим образом:  $\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1)$ , но для них нет столь красивого геометрического представления.

- Аналогично,  $n$ -угольные числа — это суммы первых  $k$  членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью  $n - 2$ .

- Наиболее известны треугольные числа:  
 $\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + k.$

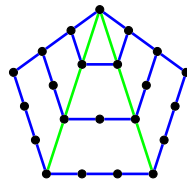


$$\frac{1}{2}(3 \cdot 3^2 - 1) = 1 + 4 + 7.$$

## О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется **пентагональная формула Эйлера**?

- Дело в том, что числа вида  $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$  — это так называемые **пятиугольные числа**.
- Формально,  $k$ -е пятиугольное число — это сумма первых  $k$  членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:  
$$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2).$$
- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.
- Числа вида  $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$  получаются похожим образом:  
$$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1),$$
 но для них нет столь красивого геометрического представления.
- Аналогично,  $n$ -угольные числа — это суммы первых  $k$  членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью  $n - 2$ .
- Наиболее известны треугольные числа:  
$$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + k.$$

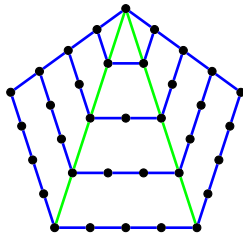


$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(3 \cdot 4^2 - 1) &= \\ &= 1 + 4 + 7 + 10.\end{aligned}$$

## О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется **пентагональная формула Эйлера**?

- Дело в том, что числа вида  $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$  — это так называемые **пятиугольные числа**.
- Формально,  $k$ -е пятиугольное число — это сумма первых  $k$  членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:  
$$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2).$$
- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.
- Числа вида  $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$  получаются похожим образом:  
$$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1),$$
 но для них нет столь красивого геометрического представления.
- Аналогично,  $n$ -угольные числа — это суммы первых  $k$  членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью  $n - 2$ .
- Наиболее известны треугольные числа:  
$$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + k.$$

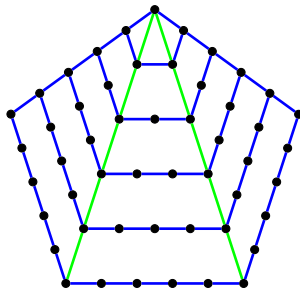


$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(3 \cdot 5^2 - 1) &= \\ &= 1 + 4 + 7 + 10 + 13.\end{aligned}$$

## О многоугольных числах

Почему предыдущая теорема называется **пентагональная формула Эйлера**?

- Дело в том, что числа вида  $\frac{1}{2}(3k^2 - k)$  — это так называемые **пятиугольные числа**.
- Формально,  $k$ -е пятиугольное число — это сумма первых  $k$  членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 3:  
$$\frac{1}{2}(3k^2 - k) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3k - 2).$$
- Эти числа имеют геометрическое представление в виде числа точек в пятиугольнике.
- Числа вида  $\frac{1}{2}(3k^2 + k)$  получаются похожим образом:  
$$\frac{1}{2}(3k^2 + k) = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1),$$
 но для них нет столь красивого геометрического представления.
- Аналогично,  $n$ -угольные числа — это суммы первых  $k$  членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью  $n - 2$ .
- Наиболее известны треугольные числа:  
$$\frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + k.$$



$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(3 \cdot 6^2 - 1) &= \\ &= 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16.\end{aligned}$$

## Асимптотические оценки числа $p(n)$

Теорема (формула Харди–Рамануджана)

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{n}} \quad (б/д).$$

### Замечание

Есть и формулы, дающие более точное приближение числа  $p(n)$ , чем теорема Харди–Рамануджана. Например, те же авторы доказали также следующую формулу:

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left( \frac{e^{C\lambda_n}}{\lambda_n} \right) + O(e^{D\sqrt{n}}),$$

где  $C = \pi\sqrt{2/3}$ ,  $\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$  и  $D$  — любое число, большее  $\frac{1}{2}C$  (б/д).