Äèñêðåòíàÿ ìàòåìàòèêà

Ãëàâà 3. Ýëåìåíòàðíàÿ êîìáèíàòîðèêà

À. Â. Ïàñòîð

03.10.2022

Äîïîëíèòåëüíûå ìàòåðèàëû ïî êîìáèíàòîðèêå

1. Ì. Õîëë, Êîìáèíàòîðèêà . Ì.: Ìèð, 1970.
2. Ð. Ñòàíëè,Ïåðå÷èñëèòåëüíàÿ êîìáèíàòîðèêà . Ì.: Ìèð, 1990.

Ñëàéäû ïî äèñêðåòíîé ìàòåìàòèêå áóäóò ïóáëèêîâàòüñÿ ïî àäðåñó

https://logic.pdmi.ras.ru/~pastor/ITMO/2022-23/

Îñíîâíûå êîìáèíàòîðíûå ÷èñëà: ÷èñëî ðàçìåùåíèé

×èñëî ðàçìåùåíèé èç n ýëåìåíòîâ ïî k ýòî êîëè÷åñòâî ïîñëåäîâàòåëüíîñòåé äëèíû k, ñîñòàâëåííûõ èç ðàçëè÷íûõ ýëåìåíòîâ n-ýëåìåíòíîãî ìíîæåñòâà. Îáîçíà÷àåòñÿ A_n^k.

Ýòî ÷èñëî ìîæíî èíòåðïðåòèðîâàòü êàê

- ÷èñëî èíúåêòèâíûõ îòîáðàæåíèé $f : [1::k] \to [1::n]$;
- ÷èñëî ñïîñîáîâ ðàçëîæèòü k øàðîâ ïî n ÿùèêàì (øàðû èìåþò íîìåðà îò 1 k, ÿùèêè 1 n, â ÿùèê ïîìåùàåòñÿ íå áîëåå îäíîãî øàðà).

×èñëî ðàçìåùåíèé ñ ïîâòîðåíèÿìè èç n ýëåìåíòîâ ïî k ýòî êîëè÷åñòâî ïîñëåäîâàòåëüíîñòåé äëèíû k, ñîñòàâëåííûõ èç ýëåìåíòîâ n-ýëåìåíòíîãî ìíîæåñòâà. Îáîçíà÷àåòñÿ $\bar{A}_n^k$.

Ýòî ÷èñëî ìîæíî èíòåðïðåòèðîâàòü êàê

- ÷èñëî îòîáðàæåíèé $f : [1::k] \to [1::n]$;
- ÷èñëî ñïîñîáîâ ðàçëîæèòü k øàðîâ ïî n ÿùèêàì (øàðû èìåþò íîìåðà îò 1 k, ÿùèêè îò 1 n, â ÿùèê ïîìåùàåòñÿ ëþáîå ÷èñëî øàðîâ).

Ìû óæå äîêàçûâàëè, ÷òî $A_n^k = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ è $\bar{A}_n^k = n^k$.

Îñíîâíûå êîìáèíàòîðíûå ÷èñëà: ÷èñëî ñî÷åòàíèé

×èñëî ñî÷åòàíèé èç n ýëåìåíòîâ ïî k ýòî êîëè÷åñòâî k-ýëåìåíòíûõ ïîäìíîæåñòâ â n-ýëåìåíòíîì ìíîæåñòâå (ãäå $0 \le k \le n$).

Âîçìîæíûå îáîçíà÷åíèÿ: C_n^k èëè $\binom{n}{k}$.

Ýòî ÷èñëî ìîæíî èíòåðïðåòèðîâàòü êàê

- ÷èñëî ñòðîãî ìîíîòîííî âîçðàñòàþùèõ ôóíêöèé $f : [1::k] \to [1::n]$;
- ÷èñëî ñïîñîáîâ ðàçëîæèòü k îäèíàêîâûõ øàðîâ ïî n ïðîíóìåðîâàííûì ÿùèêàì (â êàæäûé ÿùèê ïîìåùàåòñÿ íå áîëåå îäíîãî øàðà).

Òåîðåìà

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Äîêàçàòåëüñòâî. Ïóñòü $|X| = n$.

Åñòü $A_n^k = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ ñïîñîáîâ âûáðàòü ïîñëåäîâàòåëüíîñòü èç k ðàçëè÷íûõ ýëåìåíòîâ X.

Êàæäàÿ òàêàÿ ïîñëåäîâàòåëüíîñòü çàäàåò k-ýëåìåíòíîå ïîäìíîæåñòâî X.

Êàæäîå ïîäìíîæåñòâî ïîñ÷èòàíî $k!$ ðàç, èáî âñå ýëåìåíòû ìîæíî óïîðÿäî÷èòü $k!$ ñïîñîáàìè. Èòîãî, $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ðàçëè÷íûõ ïîäìíîæåñòâ. □

Îñíîâíûå êîìáèíàòîðíûå ÷èñëà: ÷èñëî ñî÷åòàíèé ñ ïîâòîðåíèÿìè

×èñëî ñî÷åòàíèé ñ ïîâòîðåíèÿìè èç n ýëåìåíòîâ ïî k ýòî êîëè÷åñòâî íåóïîðÿäî÷åííûõ íàáîðîâ èç k ýëåìåíòîâ n-ýëåìåíòíîãî ìíîæåñòâà (â îòëè÷èè îò ìíîæåñòâà, â íàáîðå îäèí è òîò æå ýëåìåíò ìîæåò âñòðå÷àòüñÿ íåñêîëüêî ðàç).

Âîçìîæíûå îáîçíà÷åíèÿ: C_n^k èëè $\binom{n}{k}$.

Ýòî ÷èñëî ìîæíî èíòåðïðåòèðîâàòü êàê

- ÷èñëî íåñòðîãî ìîíîòîííî âîçðàñòàþùèõ ôóíêöèé $f : [1::k] \to [1::n]$;
- ÷èñëî ñïîñîáîâ ðàçëîæèòü k íåðàçëè÷èìûõ øàðîâ ïî n ÿùèêàì (â ÿùèê ìîæíî êëàñòü ëþáîå ÷èñëî øàðîâ);
- ÷èñëî ñïîñîáîâ âûáðàòü k ïðåäìåòîâ, åñëè åñòü ïðåäìåòîâ n òèïîâ (íà ñêëàäå åñòü õîòÿ áû ïî k ïðåäìåòîâ êàæäîãî òèïà; ïðåäìåòû îäíîãî òèïà àáñîëþòíî íåðàçëè÷èìû).

Ôîðìóëà äëÿ ÷èñëà ñî÷åòàíèé ñ ïîâòîðåíèÿìè

Òåîðåìà

$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k}$.

Ëåììà

×èñëî ðåøåíèé óðàâíåíèÿ $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = k$ (1) â N_0 ðàâíî $\bar{C}_n^k$.

Äîêàçàòåëüñòâî. Ïóñòü $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$.

Ñòðîèì âçàèìíî îäíîçíà÷íîå ñîîòâåòñòâèå ìåæäó ðåøåíèÿìè óðàâíåíèÿ (1) è íåóïîðÿäî÷åííûìè íàáîðàìè èç k ýëåìåíòîâ ìíîæåñòâà X.

Êàæäîìó ðåøåíèþ $(t_1; t_2; \ldots; t_n)$ ñòàâèì â ñîîòâåòñòâèå íàáîð, ñîñòîÿùèé èç t_1 ýêçåìïëÿðîâ ýëåìåíòà x_1, t_2 ýêçåìïëÿðîâ x_2, ..., t_n ýêçåìïëÿðîâ x_n.

Îáðàòíî, êàæäîìó íàáîðó T ñòàâèì â ñîîòâåòñòâèå ðåøåíèå $(t_1; t_2; \ldots; t_n)$, ãäå t_i ÷èñëî ýêçåìïëÿðîâ x_i â T. □

Ôîðìóëà äëÿ ÷èñëà ñî÷åòàíèé ñ ïîâòîðåíèÿìè: äîêàçàòåëüñòâî

Äîêàçàòåëüñòâî òåîðåìû.

Ðàññìîòðèì â ðÿä k øàðèêîâ è n 1 ïåðåãîðîäêó.

Âñåãî åñòü $C_{n+k\ 1}^{k}$ òàêèõ ðàññìîòðåíèé.

Îáîçíà÷èì ÷åðåç t_1 ÷èñëî øàðèêîâ äî ïåðâîé ïåðåãîðîäêè; t_2 ìåæäó ïåðâîé è âòîðîé ïåðåãîðîäêàìè; . . . ; t_n ïîñëå $(n\ 1)$-é ïåðåãîðîäêè.

Ïîëó÷àåì áèåêöèþ ìåæäó ðåøåíèÿìè óðàâíåíèÿ (1) è òàêèìè ðàññìîòðåíèÿìè øàðîâ è ïåðåãîðîäîê. □

Ñâîéñòâà ÷èñåë ñî÷åòàíèé

$C_n^k = C_n^{n-k}$ (î÷åâèäíî).

$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Äîêàçàòåëüñòâî. $C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$

$$= \frac{n!\,(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!\,(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$ □

Äðóãîé ñïîñîá äîêàçàòåëüñòâà. Ïóñòü $X = \{x_0; x_1; \ldots; x_n\}$.

- $(k+1)$-ýëåìåíòíûå ïîäìíîæåñòâà X áûâàþò äâóõ âèäîâ: ñîäåðæàùèå x_0 è íå ñîäåðæàùèå x_0.
- Åñëè $x_0 \notin S \subset X$, òî $S \subset X' = \{x_1; \ldots; x_n\}$. Òàêèõ ïîäìíîæåñòâ C_n^{k+1}.
- Åñëè $x_0 \in S \subset X$, òî óäàëèâ x_0 èç S. Ïîëó÷èì ïîäìíîæåñòâî $S' \subset X'$, ãäå $|S'| = k$. Òàêèõ ïîäìíîæåñòâ C_n^k. □

Ïîëüçóÿñü ñîîòíîøåíèåì íà C_n^k èìåþ êàê ëåãêàðàè÷åñêîå, òàê è êîìáèíàòîðíîå äîêàçàòåëüñòâî.

Ñâîéñòâà ÷èñåë ñî÷åòàíèé

Òðåóãîëüíèê Ïàñêàëÿ

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

Äîêàçàòåëüñòâî.

Àëãåáðàè÷åñêè:

$kC_n^k = k\,\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = nC_{n-1}^{k-1}$.

Êîìáèíàòîðíî: Êàê â ëåâîé, òàê è â ïðàâîé ÷àñòè ôîðìóëû çàïèñàíî ÷èñëî k-ýëåìåíòíûõ ïîäìíîæåñòâ n-ýëåìåíòíîãî ìíîæåñòâà, â êîòîðûõ îäèí ýëåìåíò îòìå÷åí.

□

Ñâîéñòâà ÷èñåë ñî÷åòàíèé

(Áèíîì Íüþòîíà) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

Äîêàçàòåëüñòâî.

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \text{ ñêîáîê}}$;
- ñëàãàåìîå $a^{n-k}b^k$ ïîëó÷àåòñÿ, åñëè èçk ñêîáîê âûáðàòü b, à èç îñòàëüíûõ a.
- Ýòî ìîæíî ñäåëàòü C_n^k ñïîñîáàìè. □

Äðóãîå íàçâàíèå ÷èñåë C_n^k áèíîìèàëüíûå êîýôôèöèåíòû .

$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

- Êîìáèíàòîðíîå äîêàçàòåëüñòâî: â ëåâîé è â ïðàâîé ÷àñòè çàïèñàíî ÷èñëî ïîäìíîæåñòâ n-ýëåìåíòíîãî ìíîæåñòâà. □

$C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$.

$C_n^0 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots = 2^{n-1}$.

Ñâîéñòâà ÷èñåë ñî÷åòàíèé

Äîêàçàòåëüñòâî. Äîêàæåì, ÷òî $C_n^0 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots$.

Ïóñòü $X = \{x_1; \ldots; x_n\}$.

Ïîñòðîèì áèåêöèþ ìåæäó âñåìè ÷åòíûìè è âñåìè íå÷åòíûìè ïîäìíîæåñòâàìè X.

Ïóñòü $f(S) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} S \setminus \{x_n\}, & x_n \in S \\ S \cup \{x_n\}, & x_n \notin S. \end{cases}$

Ïîëó÷àåì îòîáðàæåíèå $f : P(X) \to P(X)$, îáëàäàþùåå ñëåäóþùèì ñâîéñòâîì: $\forall S\,(f(f(S)) = S)$.

- Îòîáðàæåíèå, îáëàäàþùåå òàêèì ñâîéñòâîì íàçûâàþòñÿ **èíâîëþöèåé**.
- Â ÷àñòíîñòè, ýòî îçíà÷àåò, ÷òî f îáðàòíî ñàìîìó ñåáå, ñëåäîâàòåëüíî, f áèåêöèÿ.

Ïðè ýòîì, $|S|$ è $|f(S)|$ âñåãäà èìåþò ðàçíóþ ÷åòíîñòü.

Òàêèì îáðàçîì, f òàêæå çàäàåò áèåêöèþ ìåæäó âñåìè ÷åòíûìè è âñåìè íå÷åòíûìè ïîäìíîæåñòâàìè X. □

Ìóëüòèíîìèàëüíûå êîýôôèöèåíòû

Îïðåäåëåíèå

Ïóñòü $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$, ãäåm 2 N è $n; k_1; k_2; \ldots; k_m$ 2 N_0. Òîãäà ÷èñëî ñîîòíîøåíèé ðàçáèòü n-ýëåìåíòíîå ìíîæåñòâî X íà m íåïåðåñåêàþùèõñÿ ïîäìíîæåñòâ $X_1; X_2; \ldots; X_m$, ãäåjX_ij = k_i, íàçûâàåòñÿ $\binom{n}{k_1; k_2; \ldots; k_m}$ è íàçûâàåòñÿ*ìóëüòèíîìèàëüíûì êîýôôèöèåíòîì* .
(Äðóãîå íàçâàíèå: *ïîëèíîìèàëüíûé êîýôôèöèåíò* .)

Òåîðåìà

$$\binom{n}{k_1; k_2; \ldots; k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}.$$

Äîêàçàòåëüñòâî. Åñòü$n!$ ñïîñîáîâ óïîðÿäî÷èòü ýëåìåíòû ìíîæåñòâà X.

Äëÿ êàæäîãî ñïîñîáà, ïîìåùàåì ïåðâûå k_1 ýëåìåíòîâ â X_1; ñëåäóþùèå k_2 ýëåìåíòîâ â X_2 è ò. ä.

Ïîëó÷àåì ðàçáèåíèå X íà ïîäìíîæåñòâà íóæíîãî ðàçìåðà.

Êàæäîå ðàçáèåíèå ïîñ÷èòàíî $k_1! k_2! \ldots k_m!$ ðàç. □

Îáîáùåííûé áèíîì Íüþòîíà

Òåîðåìà

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n} \binom{n}{k_1; k_2; \ldots; k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}.$$

Äîêàçàòåëüñòâî. Àíàëîãè÷íî äîêàçàòåëüñòâó Áèíîìà Íüþòîíà.

Ïðè ðàñêðûòèè ñêîáîê ñëàãàåìîå $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$ ïîëó÷àòñÿ, åñëè âûáðàòü èç k_1 ñêîáîê ñëàãàåìîå a_1, èç k_2 ñêîáîê ñëàãàåìîå a_2, . . . , èç k_m ñêîáîê ñëàãàåìîå a_m.

Òàêîé âûáîð ìîæíî ñäåëàòü â òî÷íîñòè $\binom{n}{k_1; k_2; \ldots; k_m}$ ñïîñîáàìè. □

Ôîðìóëà âêëþ÷åíèé-èñêëþ÷åíèé

Ïðèìåðû

1. Ïóñòü $A; B$ êîíå÷íûå ìíîæåñòâà. Òîãäà

$$jA [Bj = jAj + jBj \ j \ A \setminus Bj:$$

2. Ïóñòü $A; B; C$ êîíå÷íûå ìíîæåñòâà. Òîãäà

$$jA [B [Cj = jAj + jBj + jCj \ j \ A \setminus Bj \ j \ B \setminus Cj \ j \ C \setminus Aj + jA \setminus B \setminus Cj:$$

Òåîðåìà (Ôîðìóëà âêëþ÷åíèé-èñêëþ÷åíèé)

Ïóñòü $A_1; : : : ; A_n$ êîíå÷íûå ìíîæåñòâà. Òîãäà

$$\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{\varnothing \neq I \subseteq [1::n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| : \qquad (1)$$

Äîêàçàòåëüñòâî.

- Ïóñòü $x \in A_{i_1}; : : : ; A_{i_k}$ è x íå ïðèíàäëåæèò îñòàëüíûì A_j.
- Òîãäà x ó÷èòûâàåòñÿ â ôîðìóëå (1) ñ êîýôôèöèåíòîì

$$\sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{\ell+1} C_k^{\ell} = 1:$$

□

Ñëääñòâèå (äðóãàÿ ôîðìóëèðîâêà ôîðìóëû âêëþ÷åíèé-èñêëþ÷åíèé)

Ïóñòü X êîíå÷íîå ìíîæåñòâî, $jXj = N$;

$P_1; : : : ; P_n$ ñâîéñòâà ýëåìåíòîâ ìíîæåñòâà X (ò. å. îäíîìåñòíûå ïðåäèêàòû íà X);

$N_{i_1;:::;i_k}$ ÷èñëî ýëåìåíòîâ, óäîâëåòâîðÿþùèõ $P_{i_1}; : : : ; P_{i_k}$;

$N(0)$ ÷èñëî ýëåìåíòîâ, íå óäîâëåòâîðÿþùèõ íè îäíîìó ñâîéñòâó.

Òîãäà

$$N(0) = N - \sum_{i} N_i + \sum_{i_1 < i_2} N_{i_1;i_2} - : : :$$
$$: : : + (-1)^k \sum_{i_1 < : : : < i_k} N_{i_1;:::;i_k} + : : :$$
$$: : : + (-1)^n N_{1;:::;n}: \quad (2)$$

Ñóáôàêòîðèàëû (çàäà÷à î áåñïîðÿäêàõ)

Îïðåäåëåíèå

Ïåðåñòàíîâêîé íà ìíîæåñòâå M íàçûâàåòñÿ ïðîèçâîëüíàÿ áèåêöèÿ $: M ! M$.

Íåïîäâèæíîé òî÷êîé ïåðåñòàíîâêè íàçûâàåòñÿ òàêîé ýëåìåíò $x \in M$, ÷òî $(x) = x$.

S_n ìíîæåñòâî âñåõ ïåðåñòàíîâîê íà $[1::n]$.

Çàìå÷àíèå

Ìû çíàåì, ÷òî $jS_nj = n!$.

Îïðåäåëåíèå

$D(n)$ ÷èñëî ïåðåñòàíîâîê èç S_n, íå èìåþùèõ íåïîäâèæíûõ òî÷åê.

Òåîðåìà

$D(n+1) = n(D(n) + D(n-1))$.

Äîêàçàòåëüñòâî.

- Ïóñòü $2 S_{n+1}$; $k = (n+1)$; $\grave{} = {}^{1}(n+1)$.
- Âîçüìåì äâà ñëó÷àÿ: $k \in \grave{}$ èëè $k = \grave{}$.
  1. Ïóñòü $k \in \grave{}$.

     Òîãäà ${}^{0}(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} (x); & x \in \grave{} \\ k; & x = \grave{} \end{cases}$ ïðåäñòàâèìà èç S_n áåç íåïîâòîðåíèé òî÷åê.

     Äëÿ êàæäîãî $k \in [1::n]$ ñòðîèì $D(n)$ òàêèõ ïðåäñòàâëåíèé.
  2. Ïóñòü $k = \grave{}$.

     Òîãäà $j_{[1::n] \cap f k g}$ ïðåäñòàâëåíà íà $[1::n] \cap f k g$ áåç íåïîâòîðåíèé òî÷åê.

     Äëÿ êàæäîãî $k \in [1::n]$ ñòðîèì $D(n-1)$ òàêèõ ïðåäñòàâëåíèé.
- Èòîãî, ïîëó÷àåì $nD(n) + nD(n-1)$ ïðåäñòàâëåíèé áåç íåïîâòîðåíèé òî÷åê. □

Äèñêðåòíàÿ
ìàòåìàòèêà.
Ãëàâà 3.
Ýëåìåíòàðíàÿ
êîìáèíàòîðèêà.

À. Â. Ïàñòîð

Çàìå÷àíèå

Äëÿ îáû÷íûõ ôàêòîðèàëîâ âûïîëíÿåòñÿ òàêîå æå ñîîòíîøåíèå:

$$(n+1)! = n(n! + (n-1)!):$$

Ïîýòîìó ÷èñëà $D(n)$ íàçûâàþò ñóáôàêòîðèàëàìè.

Òåîðåìà

$$D(n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Äîêàçàòåëüñòâî. Ïóñòü $X = S_n$.

- P_i ñîîòâåòñòâóåò $(i) = i$ äëÿ ïåðåñòàíîâêè $2\ S_n$.
- Òîãäà $N = n!$ è $N_{i_1;\ldots;i_k} = (n-k)!$.
- Ïî ôîðìóëå (2) èìååì: $D(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n-k)! C_n^k = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. □