

Вопросы по курсу теории графов. 2025-26 г

1. Простейшие понятия

1. Граф, подграф. Вершина, окрестность, степень. Сумма степеней вершин графа.
2. Пути, циклы и маршруты. Лемма о выделении простого пути и цикла.
3. Лемма о длинном пути и цикле.
4. Компоненты связности.
5. Дерево. Количество ребер дерева, выделение оственного дерева.
6. Единственность пути между вершинами дерева.
7. Нормальное оственное дерево.
8. Радиус, диаметр и центр графа. Дерево поиска в ширину.
9. Двудольный граф. Критерий двудольности.

2. Пути и циклы

1. Эйлеров путь и цикл в графе.
2. Лемма о преобразовании пути в цикл.
3. Существование Гамильтонова пути и цикла: классические критерии Оре и Дирака.
4. Существование Гамильтонова пути и цикла: замыкание по Хваталу.
5. Существование Гамильтонова цикла: критерий Хватала.
6. Гамильтонов цикл в кубе связного графа.

3. Паросочетания, независимые множества и покрытия

1. Независимые множества, паросочетания и покрытия в графе. Теорема Галлаи.
2. Максимальное паросочетание и дополняющие пути: теорема Бержа.
3. Теорема Холла.
4. Следствия из теоремы Холла: паросочетания в двудольном графе, где степени одной доли больше чем другой, а также в регулярном двудольном графе.
5. Теорема о гареме.
6. Теорема Кёнига и ее следствие.
7. Паросочетания с предпочтениями. Теорема Гэйла-Шепли.
8. Теорема Татта о совершенном паросочетании.
9. Теорема Петерсена о совершенном паросочетании в регулярном графе степени 3.
10. Теорема Петерсена о выделении 2-фактора в $2k$ -регулярном графе и ее следствия о регулярных факто-рах.
11. Теорема Томассена о почти регулярном факторе почти регулярного графа.
12. Дефицит графа. Формула Бержа.

4. Связность

1. Точки сочленения и блоки в связном графе. Лемма о пересечении блоков. Каждое ребро содержится в единственном блоке.
2. Дерево блоков и точек сочленения. Лемма о пути и теорема.
3. Крайние блоки.
4. Алгоритм построения блоков с помощью последовательных разрезов графа по точкам сочленения.
5. Рекурсивный алгоритм построения дерева блоков и точек сочленения.
6. Разбиение двусвязного графа на два связных графа заданных размеров.
7. Теорема Гёринга (для двух множеств вершин).
8. Следствие — две формы теоремы Менгера (для двух вершин и для вершины и множества).
9. Теорема Уитни.
10. Теорема Дирака о цикле, содержащем заданные k вершин.
11. Лемма о k -вершинном разделяющем множестве в k -связном графе.
12. Стягивание ребра в двусвязном графе без потери двусвязности.
13. Зависимые и независимые разделяющие множества.
14. Разбиение k -связного графа парой независимых разделяющих множеств: лемма о компонентах.
15. Стягивание ребра в трёхсвязном графе без потери трёхсвязности.

Раскраски

1. Хроматическое число, связь с числом независимости.
2. Правильная раскраска связного графа с вершиной меньшей степени.
3. Лемма о галочке.
4. Теорема Брукса.
5. Конструкция графа с произвольным хроматическим числом без треугольников.

- 6.** Хроматический многочлен графа.
- 7.** Хроматический многочлен и компоненты связности.
- 8.** Хроматический многочлен и блоки.
- 9.** Кратность корня 0 хроматического многочлена.
- 10.** Кратность корня 1 хроматического многочлена.
- 11.** Оптимальные раскраски ребер и их свойства (две леммы).
- 12.** Теорема Кёнига о хроматическом индексе двудольного графа.
- 13.** Теорема Гупты о покрывающем индексе двудольного графа.
- 14.** Теорема Визинга.
- 15.** Списочные раскраски вершин и k -редуцируемые графы.
- 16.** d -раскраски. Лемма о избыточной вершине.
- 17.** d -раскраски. Лемма об удалении вершины с сохранением связности.
- 18.** Теорема Бородина о d -раскрасках.
- 19.** Списочная теорема Брукса.

Планарные графы

1. Изображение графа на плоскости, грань.
2. Теорема Жордана для замкнутой ломаной.
3. Изображение графа на плоскости и сфере, их соответствие. Внешняя грань.
4. Граница грани. Свойства.
5. Циклический обход границы грани.
6. Несвязная граница грани у несвязного графа.
7. Внутренние рёбра граней — мосты. Границы граней графа без мостов — циклы.
8. Если есть две грани с одинаковой границей, то граф — простой цикл.
9. Границы граней двусвязного графа.
10. Границы граней трёхсвязного графа.
11. Изоморфизмы графов и плоских изображений. Единственность изображения трёхсвязного планарного графа на плоскости.
12. Формула Эйлера.
13. Оценки на число ребер плоского графа и существование вершины степени не более 5.
14. Непланарность K_5 и $K_{3,3}$ и их подразбиений.
15. Подразбиения K_5 и $K_{3,3}$ и стягивание ребра.
16. Теорема Куратовского: трёхсвязность минимального контрпримера.
17. Теорема Куратовского: доказательство без трёхсвязности минимального контрпримера.
18. Триангуляция графа.
19. Существование в триангуляции ребра, входящего ровно в два треугольника.
20. Теорема Вагнера о выпрямлении изображения планарного графа.
21. Лемма о соединении точки на грани с “серединами” рёбер.
22. Двойственный график. Соответствие объектов плоского графа и его двойственного (вершины, ребра, грани, петли, мосты итд.).
23. $(G^*)^* \simeq G$.
24. Раскраска граней плоского графа. Теорема о 5 красках.
25. Тэйтова раскраска триангуляции, связь с реберной раскраской кубического плоского графа без мостов.
26. Эквивалентность Тэйта (без Тэйтовых раскрасок).