Теория графов. Глава 7. Орграфы.

Д. В. Карпов

2026

Определение

1) Мы будем называть рёбра орграфа *стрелками*, а множество всех стрелок ориентированного графа D будем обозначать через $A(D)$. Будем использовать обозначение $a(D) = |A(D)|$.

2) Через $E(D)$ мы будем обозначать множество ребер орграфа D без ориентации (каждую стрелку заменим обычным неориентированным ребром).

3) Для непересекающихся множеств $X, Y \subset V(D)$ через $A_D(X, Y)$ мы будем обозначать множество всех стрелок орграфа D с началом в X и концом в Y. Будем использовать обозначение $a_D(X, Y) = |A_D(X, Y)|$.

4) Запись $e = xy \in A(D)$ будет обозначать, что e — стрелка с началом x и концом y. В случае, когда допускаются кратные стрелки, эта запись не утверждает, что e — единственная стрелка с началом x и концом y.

• Если не оговорено обратное, мы будем считать, что в орграфе нет петель и сонаправленных кратных стрелок (у которых совпадают и начала, и концы).

• Пары *встречных* стрелок (вида uv и vu), как правило, допускаются.

- *Подграф* орграфа (в частности, *индуцированный подграф*) определяется так же, как для неориентированных графов. Индуцированный подграф орграфа D на множестве вершин $X \subset V(D)$ будем обозначать через $D(X)$.
- Для любой вершины v орграфа D мы через $\mathrm{N}_D^+(v)$ обозначим множество вершин орграфа D, в которые выходят стрелки из v, а через $\mathrm{N}_D^-(v)$ обозначим множество вершин орграфа D, из которых выходят стрелки в v.
- $\mathrm{N}_D(v) = \mathrm{N}_D^+(v) \cup \mathrm{N}_D^-(v)$ — *окрестность* вершины v.
- *Степень* вершины $x \in V(D)$ — это количество инцидентных ей рёбер из $E(D)$.
- Для вершины $x \in V(D)$ через $d_D^+(x)$ мы будем обозначать *исходящую степень* вершины v, то есть, количество стрелок орграфа D, выходящих из вершины x, а через $d_D^-(x)$ мы будем обозначать *входящую степень* вершины v — количество стрелок орграфа D, входящих в вершину x.
- $\delta(D)$, $\delta^+(D)$ и $\delta^-(D)$ — минимальные степень, исходящую степень и входящую степень вершин D соответственно. Аналогично, $\Delta(D)$, $\Delta^+(D)$ и $\Delta^-(D)$ — это максимальные степень, исходящая степень и входящая степень орграфа D.

• Нетрудно понять, что для орграфа D и вершины $v \in V(D)$ выполнено $d_D(v) = d_D^+(v) + d_D^-(v)$.

• Если в орграфе нет кратных стрелок, то
$d_D^+(v) = |\mathrm{N}_D^+(v)|, \quad d_D^-(v) = |\mathrm{N}_D^-(v)|, \quad d_D(v) = |\mathrm{N}_D(v)|$.

• *Пути* и *циклы* в ориентированном графе отличаются от обычного графа тем, что каждая стрелка может быть пройдена только в соответствии с направлением от начала к концу. Таким образом, у каждого пути в орграфе есть *начало* и *конец*, а у каждого цикла — фиксированное *направление обхода*.

• *Расстояние* $\mathrm{dist}_D(x, y)$ от вершины x до вершины y в орграфе D есть длина кратчайшего xy-пути. В орграфе D возможно, что $\mathrm{dist}_D(x, y) \neq \mathrm{dist}_D(y, x)$.

• Удаление вершин и стрелок из орграфа мы определим и будем обозначать так же, как удаление вершин и рёбер из неориентированного графа.

• Аналогично неориентированному графу определяется стягивание стрелки.

• Для неориентированного графа H его *ориентацией* является любой орграф $\vec{H}$ с $V(\vec{H}) = V(H)$, стрелки которого — это ориентированные каким-либо способом рёбра из $E(H)$. Таким образом, у графа H есть $2^{e(H)}$ ориентаций.

• Для орграфа D определим неориентированный граф $\underline{D}$ с множеством вершин $V(D)$ и множеством рёбер $E(D)$.

• Иногда допускается *частичная ориентация* рёбер графа G, когда часть рёбер остается неориентированными, по ним разрешен проход в обе стороны.

Сильная связность

Определение

Вершины a и b ориентированного графа G назовем *связанными*, если в графе G существуют пути из a в b и из b в a.
Ориентированный граф G называется *сильно связным*, если любые две его вершины связаны.

• Отношение связанности вершин ориентированного графа G является отношением эквивалентности (рефлексивно, симметрично, транзитивно).

• Множество вершин $V(G)$ разбивается на классы попарно связанных вершин, которые мы будем называть *компонентами сильной связности*.

• Для краткости, вместо “компонента сильной связности” будем писать КСС.

• Построим для орграфа G *орграф компонент сильной связности* $C(G)$, вершины которого — КСС G. Проведем в орграфе $C(G)$ стрелку $V_i \to V_j$ тогда и только тогда, когда в орграфе G есть хотя бы одна стрелка, направленная от КСС V_i к V_j.

Определение

Орграф называется *ациклическим*, если он не имеет ориентированных циклов.

Лемма 1

Для любого ориентированного графа G выполняются следующие утверждения.

1) $C(G)$ *— ациклический орграф.*

2) *Для любой компоненты сильной связности V_i индуцированный подграф $G(V_i)$ сильно связен.*

Доказательство. 1) Предположим противное, пусть в $C(G)$ есть цикл $V_1V_2\dots V_k$. Тогда в орграфе G все вершины из $\bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i$ попарно связаны и, следовательно, входят в одну КСС. Противоречие.

2) • Пусть $w_1, w_2 \in V_i$. Тогда существует w_1w_2-путь S и w_2w_1-путь T в орграфе G.

• Понятно, что все вершины из $V(S) \cup V(T) \ni w_1, w_2$ связаны в орграфе G, следовательно, $V(S) \cup V(T) \subset V_i$, то есть, вершины w_1 и w_2 связаны в $G(V_i)$. Таким образом, орграф $G(V_i)$ сильно связен.

Определение

Пусть V_i — компонента сильной связности ориентированного графа G.

• Назовем эту компоненту *промежуточной*, если в графе $C(G)$ существует стрелка, входящая в V_i, и существует стрелка, выходящая из V_i.

• В противном случае назовем компоненту V_i *крайней*.

• Так как в $C(G)$ нет циклов, любой максимальный путь в этом графе начинается в вершине, из которой все ребра выходят, и заканчивается в вершине, в которую все ребра входят. Такие вершины соответствуют крайним компонентам сильной связности.

• Таким образом, любая промежуточная компонента сильной связности орграфа G лежит в $C(G)$ на пути между какими-то двумя крайними компонентами.

Лемма 2

Орграф D сильно связен, если и только если для любого множества $W \subsetneq V(D)$ существует стрелка из W в $V(D) \setminus W$.

Доказательство. $\Rightarrow$. Если из некоторого множества $W \subset V(D)$ нет стрелки в $V(D) \setminus W$, то невозможно попасть из W в $V(D) \setminus W$, что противоречит сильной связности D.

$\Leftarrow$. Если орграф не является сильно связным, то он имеет крайнюю компоненту сильной связности W, из которой не выходит ни одной стрелки в $V(D) \setminus W$, что противоречит условию. $\square$

Лемма 3

Орграф D является ациклическим, если и только если его вершины можно занумеровать так, что любая стрелка ведет из вершины с меньшим номером к вершине с большим номером.

Доказательство. $\Leftarrow$. Если такая нумерация существует, отсутствие циклов очевидно: ни из какой вершины нельзя попасть в вершину с меньшим номером.

$\Rightarrow$. Существование нумерации для ациклического орграфа докажем по индукции.

• База для одновершинного орграфа очевидна.

• Понятно, что в ациклическом орграфе есть вершина a, из которой не выходит ни одной стрелки. По индукционному предположению построим нумерацию для (очевидно, ациклического) орграфа $D - a$, после чего присвоим вершине a последний, самый большой номер. $\square$

Входящее и исходящее дерево

Определение

Пусть T — такой орграф, что неориентированный граф $\underline{T}$ — дерево, $a \in V(T)$.

1) Если из каждой вершины орграфа T, кроме a, выходит ровно одно ребро, то T называется *входящим деревом* вершины a.

2) Если в каждую вершину орграфа T, кроме a, входит ровно одно ребро, то T называется *исходящим деревом* вершины a.

Лемма 4

1) *Если D — входящее дерево вершины a, то из каждой вершины D существует путь до a.*

2) *Если D — исходящее дерево вершины a, то из a существует путь до каждой вершины D.*

Доказательство. 1) Пусть $x \in V(D)$. Построим максимальный путь P с началом в x. Так как D — ациклический орграф, из конца пути P не выходит ни одной стрелки, значит, этот конец — вершина a.

2) Аналогично.

Теорема 1

Пусть G — орграф, $a \in V(G)$, V_a^- — множество всех вершин G, из которых можно дойти до a, а V_a^+ — множество всех вершин G, до которых можно дойти из a (мы считаем, что $a \in V_a^-$ и $a \in V_a^+$). Тогда существует входящее дерево вершины a с множеством вершин V_a^- и исходящее дерево вершины a с множеством вершин V_a^+.

Доказательство. Построим входящее дерево, исходящее строится аналогично.

• Положим $L_0 = \{a\}$, пусть $L_k = \{x : \mathrm{dist}_G(x, a) = k\}$. Если m — наибольшее расстояние от вершины множества V_a^- до a, то $\bigcup\limits_{k=0}^{m} L_k = V_a^-$.

• Для всех $k > 0$ проведем от каждой вершины $x \in L_k$ ровно одну стрелку, выходящую из x к вершине уровня L_{k-1} — *предку* x (такая стрелка, очевидно, есть). Обозначим через D орграф с построенным множеством стрелок. В D из каждой вершины, кроме a, выходит ровно одна стрелка.

• Предположим, что в $\underline{D}$ есть цикл Z. Пусть v — вершина наибольшего уровня L_m в Z.

• Тогда оба соседа v в Z должны лежать в уровнях не более m. Но по построению v смежна в $\underline{D}$ только с одной вершиной уровня не более m — со своим предком. Противоречие.

• Значит, $\underline{D}$ ацикличен, тогда D — входящее дерево вершины a. □

Следствие 1

В сильно связном орграфе G для любой вершины a существует исходящее и входящее деревья вершины a с множеством вершин $V(G)$.

Доказательство. Так как орграф G сильно связен, $V_a^- = V_a^+ = V(G)$. □

Теорема 2

Для сильно связного орграфа G на n вершинах выполняются следующие утверждения.

1) *Существует сильно связный остовный подграф орграфа G, в котором не более $2n-2$ стрелок.*

2) *Пусть k — длина наибольшего простого цикла в орграфе G. Тогда существует сильно связный остовный подграф орграфа G, в котором не более $2n-k$ стрелок.*

Доказательство. 1) Пусть $v \in V(G)$, а T_v^+ и T_v^- — это исходящее и входящее деревья вершины v, соответственно (они существуют по Следствию 1).

• Понятно, что остовный подграф орграфа G, полученный объединением этих двух деревьев, будет сильно связным и содержит не более $2n-2$ стрелок.

2) Пусть Z — простой цикл длины k в G.

• Построим новый орграф G', объединив все вершины цикла Z в одну новую вершину z. (Все стрелки, соединяющие остальные вершины орграфа G с вершинами цикла Z, в новом графе будут соединять эти же вершины с z. Возможно, в орграфе G' появятся кратные стрелки.)

• Орграф G' на $n-k+1$ вершинах также будет сильно связным.

• По пункту 1 в нем можно оставить не более $2(n-k)$ стрелок, обеспечивающих его сильную связность. В орграфе G к соответствующим стрелкам мы добавим k стрелок цикла Z и получим сильно связный остов, в котором не более $2(n-k)+k=2n-k$ стрелок. $\square$

Следствие

Если в сильно связном орграфе G между любыми двумя вершинами проведено не более одной стрелки, то существует сильно связный остовный подграф орграфа G, в котором не более $2n-3$ стрелок.

Доказательство.

• Очевидно, в сильно связном орграфе есть простой цикл. Пусть k — длина наибольшего простого цикла в G. Из условия следует, что $k \geq 3$.

• По пункту 2 Теоремы 2 у G существует сильно связный остовный подграф, в котором не более чем $2(n-k)+k \leq 2n-3$ стрелок. □

Гамильтоновы циклы в орграфе

• *Гамильтонов цикл* в орграфе — это простой ориентированный цикл, проходящий по всем вершинам.

• Можно обобщить на орграфы и один из классических критериев гамильтоновости — критерий Дирака. С критерием Оре это сделать не получается.

Лемма 5

Пусть орграф G таков, что $\max(\delta^+(G), \delta^-(G)) = k$. Тогда G имеет простой путь длины хотя бы k и простой цикл длины хотя бы $k+1$.

Доказательство. • НУО $\delta^+(G) \ge k$.

• Рассмотрим путь максимальной длины $P = a_1 a_2 \dots a_n$ в орграфе G. Из его последней вершины a_n выходит хотя бы k стрелок. Так как путь P нельзя продлить, все эти стрелки выходят в $a_1, \dots, a_{n-1}$.

• Пусть a_m — вершина наименьшего номера, для которой $a_n a_m \in A(G)$. Тогда в множестве $\{a_m, \dots, a_{n-1}\}$ лежат не менее k концов выходящих из a_n стрелок, следовательно, в этом множестве хотя бы k вершин. Значит, путь и цикл $a_m \dots a_{n-1} a_n$ нам подходят.

Теорема 3

(A. Ghouila-Houri, 1960.) *Пусть орграф G таков, что* $\min(\delta^+(G), \delta^-(G)) \ge \frac{v(G)}{2}$. *Тогда G имеет гамильтонов цикл.*

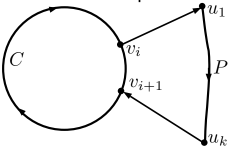
Доказательство. • Рассмотрим максимальный цикл $C = v_1 \dots v_m$. Тогда $m \ge \frac{v(G)}{2} + 1$ по Лемме 5. Нумерацию вершин считаем циклической по модулю m.

• Предположим, что цикл C не является гамильтоновым и рассмотрим орграф $H = G - V(C)$. Пусть $P = u_1 \dots u_k$ — максимальный путь в H.

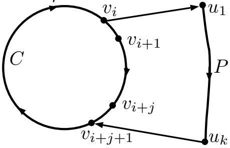
• Тогда $m + k \le v(G)$ и $k \le \frac{v(G)}{2} - 1$.

• Положим $S = \{i : v_i u_1 \in A(G)\}$ и $T = \{i : u_k v_{i+1} \in A(G)\}$.

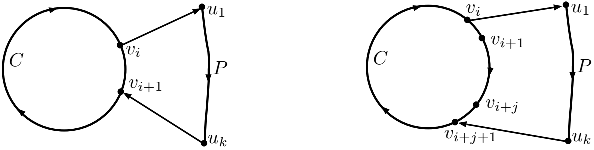
• Если $S \cap T \ni i$, то мы увеличим цикл C, заменив стрелку $v_i v_{i+1}$ на путь $v_i u_1 P u_n v_{i+1}$ (см. рис. a), что противоречит максимальности цикла C. Следовательно, $S \cap T = \varnothing$.



a



b



a b

- В силу максимальности пути P мы имеем $\mathrm{N}_G^+(u_k) \subset V(C) \cup V(P)$ и $\mathrm{N}_G^-(u_1) \subset V(C) \cup V(P)$.
- Следовательно, $\frac{v(G)}{2} \le d_G^+(u_k) \le k - 1 + |T|$ и $\frac{v(G)}{2} \le d_G^-(u_1) \le k - 1 + |S|$.
- Так как $S \cap T = \varnothing$ и $k \le \frac{v(G)}{2} - 1$, получим $|S| \ge 1$, $|T| \ge 1$ и $|S \cup T| = |S| + |T| \ge v(G) - 2k + 2 \ge m - k + 2$.
- Существуют такие индексы i и j, что $i \in S$, $i+1, \dots, i+j-1 \notin S \cup T$ и $i+j \in T$. По доказанному выше $j - 1 \le k - 2$.
- Тогда $v_i u_1, u_k v_{i+j+1} \in A(G)$ и мы получаем цикл $v_{i+j+1} C v_i u_1 P u_k$ (см. рис. b), в котором хотя бы на одну вершину больше чем в C. Противоречие.

Турниры

Определение

Турниром, называется орграф, в котором любые две вершины соединены ровно одной стрелкой.

• Такие орграфы называют турнирами, так как с их помощью удобно изображать однокруговые турниры без ничьих.

Лемма 6

В турнире существует гамильтонов путь.

Доказательство. • Рассмотрим самый длинный простой путь $P = a_1 \dots a_k$ в турнире T.

• Предположим, что он не гамильтонов и рассмотрим не вошедшую в P вершину $b \in V(T)$.

• Если $ba_1 \in A(T)$, то добавим b в начало пути. Если $a_n b \in A(T)$, то добавим b в конец пути. Так как это противоречит максимальности P, $a_1 b \in A(T)$ и $ba_n \in A(T)$

• Тогда существует такое $i \le k - 1$, что $a_i b \in A(T)$ и $ba_{i+1} \in A(T)$. В этом случае можно вставить b между a_i и a_{i+1} и увеличить путь. Противоречие с максимальностью P.

• Значит, наше предположение неверно и P — гамильтонов путь.

Следствие 2

Структура компонент сильной связности турнирного графа представляет собой простой путь $V_1V_2\dots V_m$, в котором для любых двух различных компонент V_i и V_j, где $i<j$, все ребра графа ориентированы от V_i к V_j.

Доказательство. • Между любыми двумя компонентами турнира T есть стрелка. Следовательно, орграф КСС $C(T)$ — турнир.

• Пусть $V_1,\dots,V_m$ — все КСС турнира T. По Лемме 6 в $C(T)$ есть гамильтонов путь $V_1V_2\dots V_m$.

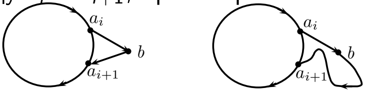
• Так как турнир $C(T)$ ацикличен, $V_iV_j\in A(C(T))$ при $i<j$. $\square$

Теорема 4

(P. Camion, 1959.) *В сильно связном турнире существует гамильтонов цикл.*

Доказательство. • В сильно связном турнире T есть циклы. Рассмотрим максимальный простой цикл $C = a_1a_2\dots a_k$. Предположим, что он не гамильтонов, пусть вершина b не вошла в этот цикл.

• Пусть не все стрелки между b и циклом C ориентированы одинаково. Тогда существуют последовательные вершины цикла a_i и a_{i+1} такие, что $a_ib, ba_{i+1} \in A(T)$ (см. рис. a). В этом случае можно удлинить максимальный цикл C, вставив вершину b между a_i и a_{i+1}, противоречие.



a b

• Пусть из всех вершин цикла C стрелки входят в b (если стрелки выходят из b к C — аналогично). Ввиду сильной связности турнира T существует путь S от b до цикла C.

• Пусть S впервые пересекает цикл C в вершине a_{i+1} (см. рис. b). Тогда можно удлинить C, заменив стрелку a_ia_{i+1} на путь a_ibSa_{i+1}. Противоречие.

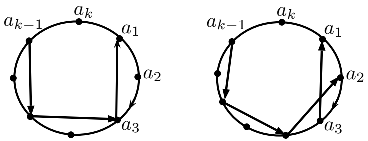
Теорема 5

В сильно связном турнире G с четырьмя и более вершинами существуют две такие вершины $a, b \in V(G)$, что турниры $G - a$ и $G - b$ сильно связны.

Доказательство. • По Теореме 4 в турнире G есть ГЦ $a_1a_2 \dots a_k$ (нумерация вершин — циклическая).

• Если $a_ia_{i+2} \in A(G)$, то турнир $G - a_{i+1}$ сильно связен. Если таких i хотя бы два, то теорема доказана.

• Пусть в $A(G)$ существует не более чем одна стрелка вида a_ia_{i+2}. Тогда можно предположить, что $a_{i+2}a_i \in A(G)$ при $i \neq k$, а ориентация ребра $a_ka_{k+2} = a_ka_2$ может быть произвольной.



a b

• Докажем, что в таком случае орграф $G - a_k$ сильно связен. Для этого достаточно показать, что существует путь из a_{k-1} в a_1. Это несложно: по стрелкам-диагоналям ГЦ существует путь $a_{k-1}a_{k-3}\dots$, приходящий, в зависимости от четности $k-1$, в a_1 (рис. a) или в a_2 (рис. b). Во втором случае дополним этот путь участком $a_2a_3a_1$.

• Таким образом, турнир $G - a_k$ сильно связен. Отметим, что мы не пользовались при этом рёбрами a_ka_2 и a_ka_{k-2}, их ориентация не имеет для нас значения. Поэтому аналогично доказывается, что турнир $G - a_2$ сильно связен. □

Теорема 6

(J. W. Moon, 1966.) *Пусть G — сильно связный турнир, а $k \in \mathbb{N}$, $3 \le k \le v(G)$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) *Для любой вершины $v \in V(G)$ существует простой цикл длины k, проходящий через v.*

2) *В турнире G существует хотя бы $v(G) + 1 - k$ простых циклов длины k.*

Доказательство. • Зафиксируем k и будем доказывать оба утверждения индукцией по количеству вершин турнира G. При $v(G) = k$ оба утверждения следуют из Теоремы 4: в сильно связном турнире G есть гамильтонов цикл.

1) • Пусть $v(G) > k$. Тогда по Теореме 5 существует такая вершина $w \ne v$, что турнир $G - w$ сильно связен.

• Так как $3 \le k \le v(G) - 1 = v(G - w)$, по индукционному предположению в турнире $G - w$ есть простой цикл длины k, проходящий через v. Этот же цикл есть и в турнире G.

2) • Пусть $v(G) > k$. Тогда по Теореме 5 существует такая вершина w, что турнир $G - w$ сильно связен.

• В турнире $G - w$ существует не менее $v(G - w) + 1 - k = v(G) - k$ простых циклов длины k.

• По пункту 1 в турнире G существует простой цикл длины k, проходящий через вершину w, следовательно, в турнире G не менее чем $v(G) - k + 1$ простых циклов длины k. $\square$

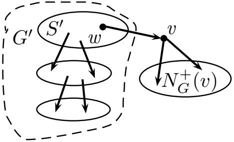
• Пусть G — орграф. Как и в неориентированном случае, $\alpha(G)$ — количество вершин в максимальном *независимом* множестве вершин орграфа G (то есть, максимальном множестве вершин, никакие две из которых не соединены стрелкой).

Теорема 7

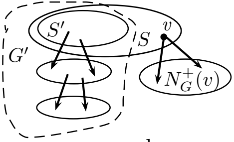
(V. Chvatal; L. Lovasz, 1974.) *В любом орграфе G существует такое независимое множество $S \subset V(G)$, что для любой вершины $v \in V(G) \setminus S$ существует путь длины не более 2 с началом в S и концом v.*

Доказательство. Доказательство будет индукцией по количеству вершин в орграфе. База при $v(G) = 1$ очевидна.

• Индукционный переход. Пусть для меньших орграфов утверждение доказано. Рассмотрим любую вершину $v \in V(G)$. Если $V(G) = \{v\} \cup \mathrm{N}^+_G(v)$, то утверждение теоремы очевидно, нам подходит $S = \{v\}$.



a



b

• Пусть $V(G) \neq \{v\} \cup \mathrm{N}_G^+(v)$. Для орграфа $G' = G - (\{v\} \cup \mathrm{N}_G^+(v))$ утверждение доказано, возьмем соответствующее этому графу независимое множество S'.

• Если существует такая вершина $w \in S'$, что $v \in N_G^+(w)$, то множество S' подходит и для графа G (см. рис. a).

• Если такой вершины w нет, положим $S = S' \cup \{v\}$. Так как $S' \cap \mathrm{N}_G^+(v) = \varnothing$, в этом случае множество S независимо, и любая вершина $x \in V(G) \setminus S$ достижима из S по пути длины не более 2 (см. рис. b). $\square$

Следствие 3

В любом турнире G существует такая вершина v, что для любой вершины $w \in V(G)$ существует vw-путь длины не более 2.

Теорема 8

(B. Roy, 1967; T. Gallai, 1968) *Пусть G — неориентированный граф, $\vec{G}$ — его ориентация. Тогда орграф $\vec{G}$ содержит путь длины не менее $\chi(G) - 1$.*

Доказательство. • Пусть $A \subset A(\vec{G})$ — минимальное по включению такое множество стрелок, что орграф $G' = \vec{G} - A$ — ациклический.

• Для любой вершины $v \in V(G)$ положим $\rho(v)$ равным длине наибольшего простого пути в орграфе G' с началом в v. Покажем, что ρ — правильная раскраска вершин графа G.

Утверждение

Пусть вершины $a, b \in V(G)$ соединены простым путём P в орграфе G'. Тогда $\rho(a) > \rho(b)$.

Доказательство. Рассмотрим путь P_b длины $\rho(b)$ в орграфе G'. Так как G' — ациклический, то любой путь в орграфе G' — простой. В частности, равный объединению P и P_b путь P_a с началом в a — простой. Так как $|P_a| > |P_b|$, то $\rho(a) > \rho(b)$. □

- *Вернемся к доказательству теоремы 8.*

- Пусть $x, y \in V(G)$ и $xy \in E(G)$. НУО $xy \in A(\vec{G})$. Если $xy \in A(G')$, то, как доказано выше, $\rho(x) \neq \rho(y)$.

- Если $xy \notin A(G')$, то $xy \in A$. Из минимальности A следует, что в орграфе $G' + xy$ есть цикл, но тогда в орграфе G' есть yx-путь, а следовательно, $\rho(x) \neq \rho(y)$.

- Мы доказали правильность раскраски ρ. Пусть k — номер наибольшего цвета в ρ. Тогда в орграфе G' (а значит, и в $\vec{G}$) есть простой путь длины k. Поскольку раскраска ρ красит вершины в цвета $0,1,\dots,k$, то $\chi(G) \leq k + 1$. $\square$

Ядро орграфа и списочные раскраски рёбер

Определение

Пусть H — орграф. Независимое множество вершин $U \subset V(H)$ называется *ядром*, если для любой вершины $v \in V(H) \setminus U$ существует хотя бы одна стрелка $vu \in A(H)$, где $u \in U$.

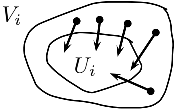
Лемма 7

Пусть H — орграф, каждой вершине $v \in V(H)$ соответствует список цветов $L(v)$, причём $d^+_H(v) < \ell(v)$. Предположим, что каждый индуцированный подграф орграфа H имеет ядро. Тогда существует правильная раскраска вершин H в соответствии с данными списками.

Доказательство. • Индукция по $v(H)$, база для пустого орграфа очевидна.

• Предположим, что для меньших орграфов лемма доказана. Пусть i — цвет, присутствующий в списках, $V_i \subset V(H)$ — множество из всех вершин, чьи списки содержат цвет i, $H_i = H(V_i)$.

• По условию, орграф H_i имеет ядро U_i. Покрасим все вершины из U_i в цвет i (это не нарушит правильности раскраски, так как ядро является независимым множеством), после чего исключим цвет i из списков всех вершин $v \in V_i \setminus U_i$ и получим новые списки $L'(v)$.



• Пусть $H' = H - U_i$. Поскольку U_i — ядро орграфа $H_i = H(V_i)$, то для любой вершины $v \in V_i \setminus U_i$ выполняется $d^+_{H'}(v) \le d^+_H(v) - 1 < \ell(v) - 1 = \ell'(v)$.

• По индукционному предположению, вершины орграфа H' можно покрасить правильным образом по новым спискам, в которых нет цвета i. В результате получится правильная раскраска всех вершин орграфа H по спискам. □

Теорема 9

(F. Galvin, 1995.) *Для любого двудольного графа* G *выполняется* $\mathrm{ch}'(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$.

Доказательство. • Пусть $G = (V_1, V_2, E)$, $k = \Delta(G)$. По теореме 5.9 мы имеем $\chi'(G) = k$, то есть, существует правильная раскраска ρ рёбер графа G в k цветов (пусть это цвета $1, \dots, k$).

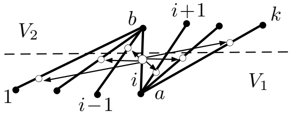
• Обозначим через G' *рёберный граф* двудольного графа G. (Вершины G' соответствуют рёбрам G. Две вершины G' смежны, если и только если смежны соответствующие рёбра.)

• Пусть каждому ребру e графа G (а значит, и каждой вершине графа G') соответствует список $L(e)$ из k цветов. Наша цель — построить правильную раскраску вершин графа G' по данным спискам. Для этого мы хотим применить к рёберному графу G' Лемму 7.

• Введём *множество предпочтений* для вершин исходного графа G. Для вершины $a \in V_1$ предпочтение $<_a$ строго упорядочивает инцидентные a рёбра по возрастанию их цветов в раскраске ρ, а для вершины $b \in V_2$, предпочтение $<_b$ строго упорядочивает инцидентные b рёбра по убыванию их цветов в раскраске ρ.

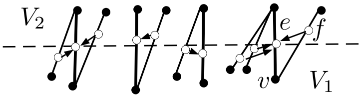
• Мы ориентируем каждое ребро ef рёберного графа G' от e к f, если для их общей вершины v рёбер e и f имеет место $e <_v f$. Тем самым, мы получим ориентацию $\vec{G}'$ графа G'.

• По построению множества предпочтений мы имеем $d^+_{\vec{G}'}(e) \le k-1 < \ell(e)$. (Если $e = ab$, $a \in V_1$, $b \in V_2$ и $\rho(e) = i$, то из e могут выходить стрелки к инцидентным a рёбрам цветов $i+1, \dots, k$ и к инцидентным b рёбрам цветов $1, \dots, i-1$, всего не более $k-1$ стрелки, см. рис.)



• Остаётся доказать, что у любого индуцированного подграфа $\vec{H}'$ орграфа $\vec{G}'$ есть ядро. Для этого мы воспользуемся теоремой Гэйла-Шепли (Stable Marriage Theorem).

• Пусть F — множество всех рёбер графа G, соответствующих вершинам из $\vec{H}'$, а $H = G(F)$. Для введённого выше множества предпочтений существует стабильное паросочетание M графа H. Рёбра из M образуют независимое множество вершин орграфа $\vec{H}'$.



• По определению стабильного паросочетания и по построению ориентации $\vec{H}'$, для любого ребра $f \in F \setminus M$ существует такое ребро $e \in M$ и общая вершина v рёбер e и f, что $f <_v e$, то есть, $fe \in A(\vec{H}')$. Таким образом, M — ядро $\vec{H}'$.

• Теперь воспользуемся Леммой 7 и получим, что существует правильная раскраска вершин графа G' (и, соответственно, рёбер графа G) по заданным спискам. Таким образом, $\mathrm{ch}'(G) = k$. $\square$

Покрытие вершин путями

Теорема 10

(T. Gallai; A. Milgram, 1960.) *Вершины орграфа G можно покрыть не более, чем $\alpha(G)$ попарно непересекающимися простыми путями.*

Доказательство. • Для каждого простого пути P обозначим его *конец* через $t(P)$.

• Будем называть *покрытием* орграфа G множество из нескольких попарно непересекающихся простых путей в G, покрывающих все его вершины. Для каждого покрытия $\mathcal{P}$ обозначим через $T(\mathcal{P})$ множество концов всех путей из $\mathcal{P}$.

• На множестве покрытий орграфа G мы введём отношение порядка: будем считать, что $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2$, если $|\mathcal{P}_1| < |\mathcal{P}_2|$ и $T(\mathcal{P}_1) \subset T(\mathcal{P}_2)$.

Утверждение

Пусть $\mathcal{P}$ — минимальное по введённому отношению порядка покрытие орграфа G. Тогда на каждом пути из $\mathcal{P}$ можно выбрать по вершине так, чтобы множество выбранных вершин было независимым.

Доказательство. • Будем считать, что для меньших орграфов утверждение доказано.

• Пусть $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$, $u_i = t(P_i)$. Если множество $\{u_1, \dots, u_n\}$ — независимое, то утверждение доказано.

• Предположим, что $u_i u_j \in A(G)$. Пусть путь Q_i получен из P_i добавлением стрелки $u_i u_j$.

• Если $V(P_j) = \{u_j\}$, то заменой P_i и P_j на Q_i получаем строго меньшее в нашем порядке чем $\mathcal{P}$, покрытие, что невозможно.

• Значит, $V(P_j) \neq \{u_j\}$. Тогда рассмотрим орграф $G' = G - u_j$ и его покрытие $\mathcal{P}'$, полученное заменой пути P_j на $P'_j = P_j - u_j$.

• Докажем, что $\mathcal{P}'$ — минимальное покрытие орграфа G'.

• Если это не так, рассмотрим строго меньшее в нашем порядке покрытие $\mathcal{Q}'$ орграфа G'.

• Пусть $u'_j = t(P'_j)$, ясно, что $u'_j u_j \in A(G)$. Отметим, что единственная вершина, которая может входить в $T(\mathcal{Q}')$ и не входит в $T(\mathcal{P})$ — это u'_j. Рассмотрим три случая.

Случай 1: Существует путь $Q' \in \mathcal{Q}'$ с $t(Q') = u'_j$.

• Пусть $Q = Q'u'_ju_j$, тогда $t(Q) = u_j$.

• Рассмотрим покрытие $\mathcal{Q}$ орграфа G, полученное из $\mathcal{Q}'$ заменой пути Q' на Q. Очевидно $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$: мы имеем $T(\mathcal{Q}) \subset T(\mathcal{P})$ и $|\mathcal{Q}| = |\mathcal{Q}'| < |\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$. Противоречие с выбором $\mathcal{P}$.

Случай 2: В $\mathcal{Q}'$ нет пути с концом в u'_j, но существует путь $Q' \in \mathcal{Q}'$ с $t(Q') = u_i$.

• Пусть путь Q получен из Q' добавлением ребра u_iu_j, тогда $t(Q) = u_j$.

• Рассмотрим покрытие $\mathcal{Q}$ орграфа G, полученное из $\mathcal{Q}'$ заменой пути Q' на Q. Очевидно $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$: мы имеем $T(\mathcal{Q}) \subset T(\mathcal{P})$ и $|\mathcal{Q}| = |\mathcal{Q}'| < |\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|$. Противоречие с выбором $\mathcal{P}$.

Случай 3: В покрытии $\mathcal{Q}'$ нет ни пути с концом в u'_j, ни пути с концом в u_i.

• Тогда $|T(\mathcal{Q}')| \le |T(\mathcal{P})| - 2$, следовательно, $|\mathcal{Q}'| \le |\mathcal{P}| - 2$.

• Дополним $\mathcal{Q}'$ до покрытия $\mathcal{Q}$ орграфа G, добавив путь $\{u_j\}$. И на этот раз оказывается, что $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$, противоречие.

- Таким образом, $\mathcal{P}'$ — минимальное покрытие орграфа G'.
- Так как $v(G') < v(G)$, по индукционному предположению на путях покрытия $\mathcal{P}'$ можно выбрать по вершине так, чтобы множество выбранных вершин было независимым.
По построению покрытия $\mathcal{P}'$, выбранные вершины подходят и для покрытия $\mathcal{P}$ орграфа G. $\square$
- Теперь легко доказать теорему. Рассмотрим любое минимальное покрытие $\mathcal{P}$ орграфа G. На путях покрытия $\mathcal{P}$ можно выбрать по вершине так, чтобы эти вершины образовывали независимое множество,
следовательно, $|\mathcal{P}| \le \alpha(G)$. $\square$
- В качестве следствия из Теоремы 9 мы выведем классическую теорему Дилворса.

Определение

Пусть V — частично упорядоченное множество с порядком $<$. Подмножество $U \subset V$ — *цепь*, если любые два его элемента сравнимы и *антицепь*, если никакие два его элемента несравнимы.

Следствие 4

(R. P. Dilworth, 1950.) *Пусть V — конечное частично упорядоченное множество. Тогда минимальное количество цепей, покрывающих V, равно количеству вершин в максимальной антицепи множества V.*

Доказательство. • Построим орграф G на элементах множества V, как на вершинах: для любых $x, y \in V$ мы положим $xy \in A(G)$, если и только если $x < y$.

• Очевидно, $\alpha(G)$ равно количеству вершин в максимальной антицепи множества V, а путь в орграфе G проходит по вершинам цепи множества V.

• По Теореме 10 вершины орграфа G можно покрыть не более, чем $\alpha(G)$ путями, то есть, множество V можно покрыть не более, чем $\alpha(G)$ цепями.

• Остаётся лишь добавить, что две вершины антицепи не могут оказаться в одной цепи, поэтому покрывающих множество V цепей будет ровно $\alpha(G)$. □