# Теория графов. Глава 6. Планарные графы.

Д. В. Карпов

2024-2025

# Плоские и планарные графы



## Определение

Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались во внутренних точках. Вершины изображаются точками, а рёбра — ломаными. Внутренние точки любой ломаной, изображающей ребро графа, не должны быть вершинами графа.

## Определение

*Плоским графом* (или *плоским изображением*) мы будем называть конкретное изображение планарного графа на плоскости без пересечений и самопересечений рёбер.

- Таким образом, планарному графу могут соответствовать разные плоские графы.

## Грань плоского графа



• Изображение плоского графа делит плоскость на части — *грани*. Это ключевой объект для плоского графа, отличающий его от абстрактного планарного графа. Ниже мы дадим формальное определение граней.

• На плоскости изображен плоский граф $G$. Пусть $M$ — множество всех точек плоскости, не входящих в изображение $G$.

• Пусть запись $A \sim B$ означает, что точки $A, B \in M$ можно соединить ломаной, не пересекающей изображение графа $G$. Укажем три важных свойства $\sim$.

### Утверждение

*$\sim$ — отношение эквивалентности.*

Доказательство. • Рефлексивность. $A \sim A$

• Симметричность. Если $A \sim B$, то $B \sim A$.

• Транзитивность. Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$. $\square$

## Определение

**Грани** плоского графа $G$ — классы эквивалентности по отшению $\sim$.

• Таким образом, все точки плоскости, не лежащие на изображении графа $G$, разбиты на грани.

• Множество всех граней графа $G$ обозначается через $F(G)$, а их количество — через $f(G)$.

• Две точки из одной грани графа $G$ могут быть соединены ломаной, не пересекающей изображение $G$.

• Любая ломаная, соединяющая две точки из разных граней, пересекает изображение $G$.

## Теорема Жордана для замкнутой ломаной



### Теорема 1

**(C. Jordan, 1887.)** *Замкнутая несамопересекающаяся ломаная $P$ делит точки плоскости, не лежащие на $P$, на две такие части, что выполнены следующие условия:*

(1) *любые две точки из одной части можно соединить ломаной, не пересекающей $P$;*

(2) *любая ломаная, соединяющая две точки из разных частей, пересекает $P$.*

Доказательство. • Пусть $P_1 \dots P_m$ — вершины $P$ в порядке обхода по часовой стрелке. Обозначим через $M$ множество всех точек плоскости, не лежащих на $P$.

• Зафиксируем на плоскости вектор $\ell$, не параллельный ни одной из сторон $P$. Из каждой точки $A \in M$ выпустим луч $\ell(A)$ в направлении $\ell$.

• В случае, если $\ell(A)$ содержит вершину $P_i$ многоугольника $P$, но стороны $P_{i-1}P_i$ и $P_iP_{i+1}$ лежат в одной полуплоскости относительно содержащей $\ell(A)$ прямой, мы будем говорить, что многоугольник $P$ в вершине $P_i$ *касается* $\ell(A)$.

• Посчитаем число $p(A)$ точек пересечения $\ell(A)$ с $P$, не являющихся касаниями. Очевидно, что $p(A)$ конечно.

• Часть $M_0$ будет состоять из всех точек $A \in M$, для которых $p(A)$ четно, а часть $M_1$ будет состоять из всех точек $B \in M$, для которых $p(B)$ нечетно.

### Утверждение

*$M_0$ и $M_1$ непусты.*

Доказательство. • Рассмотрим прямую $\ell_0$, параллельную вектору $\ell$, и проходящую через внутреннюю точку ломаной $P$ (то есть точку, не являющуюся ее вершиной).

• При движении по $\ell_0$ в направлении вектора $\ell$ отметим последнее пересечение с $\ell$ во внутренней точке — пусть это точка $X$.

• Рассмотрим содержащий $X$ малый отрезок $[Y, Z]$ на этом $\ell_0$, не пересекающий $P$ в отличных от $X$ точках, пусть $Y$ лежит перед $X$ при движении в направлении $\ell$.

• Тогда $p(Y) = 1$ (единственное пересечение в точке $X$), а $p(Z) = 0$.

## Утверждение

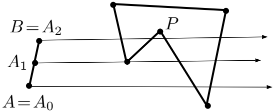
*Пусть $A, B \in M$ и отрезок $[A, B]$ не пересекает $P$. Тогда $p(A)$ и $p(B)$ имеют одинаковую четность. В частности, выполнено условие (2).*

Доказательство. • Если $AB \parallel \ell$, то утверждение очевидно.

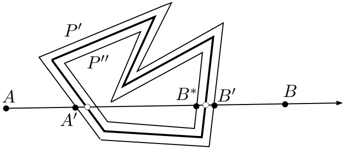
• Если нет, то отметим на отрезке $AB$ все такие точки $A_1, \ldots, A_k$ в направлении от $A$ к $B$, что $\ell(A_i)$ касается $P$ (если они есть). Положим $A_0 = A$ и $A_{k+1} = B$.

• Тогда для каждого $i \in [0..k]$, все точки отрезка $[A_i, A_{i+1}]$ имеют, очевидно, одинаковое значение функции $p$, а при переходе на соседний отрезок функция $p$ может иметь четный скачок (каждое касание $\ell(A_i)$ многоугольника $P$ добавляет точкам с одной стороны от $A_i$ двойку к количеству пересечений, см. рис. a).

• В любом случае, на всем отрезке $[A, B]$ функция $p$ имеет одинаковую четность. $\square$



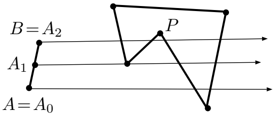

a.



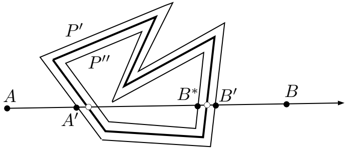

b.

## Докажем (1).

• Пусть $A, B \in M_i$. Если отрезок $[A, B]$ не пересекает $P$, то все понятно. Пусть пересекает, причем $A_1$ и $B_1$ — ближайшие к $A$ и $B$ соответственно точки пересечения.




a

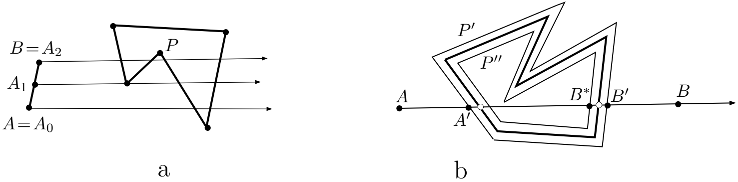



b

• Отметим на отрезке $[A, A_1]$ точку $A'$ очень близко к $A_1$, а на отрезке $[B_1, B]$ — точку $B'$ очень близко к $B_1$, пусть $|A_1A'| = |B_1B'| = \delta$ (см. рис. b). Тогда $p(A) = p(A')$ и $p(B) = p(B')$.

• Проведем вдоль каждой стороны многоугольника $P$ две параллельных прямых на расстоянии $\delta$ с разных сторон, выбрав это число столь малым, чтобы в результате получились два "очень близких" к $P$ многоугольника $P'$ и $P''$ так, чтобы стороны $P'$ и $P''$ не пересекали сторон $P$. (Достаточно выбрать $\delta$ меньше, чем минимальное расстояние от стороны $P$ до вершины, на ней не лежащей.)

• НУО $A'$ лежит на $P'$. Если и $B'$ лежит на $P'$, то мы построили от $A'$ до $B'$ ломаную, не пересекающую $P$, тогда такая ломаная построена и от $A$ до $B$.




• Пусть $B'$ лежит на $P''$, тогда обозначим через $B^*$ точку пересечения $P'$ с прямой $AB$, лежащую около $B_1$ (разумеется, на расстоянии $\delta$).

• Несложно понять, что $p(B^*) - p(B') = \pm 1$ (разница состоит в том, что ровно для одной из этих точек учитывается пересечение около точки $B_1$).

• Однако применив доказанное выше утверждение, получим $p(B^*) \equiv p(A') \equiv p(A) \equiv p(B) \equiv p(B') \pmod 2$, противоречие. □

## Плоскость и сфера

• Плоскость и сфера переводятся друг в друга *стереографической проекцией*.

• Поставим сферу на плоскость, точку касания назовём южным полюсом, противоположную точку — северным полюсом $N$. Каждая точка $A \neq N$ сферы перейдёт в точку пересечения плоскости и луча $NA$.

### Утверждение

*Граф является планарным тогда и только тогда, когда его можно изобразить на сфере без пересечения рёбер во внутренних точках.*

Доказательство. • Переводя изображение графа со сферы на плоскость нужно лишь выбрать северный полюс так, чтобы он не совпадал ни с одной из вершин графа и не попадал на рёбра. □

- Плоское изображение планарного графа ограничено (его можно поместить в большой круг).
- Поэтому в плоском изображении планарного графа есть ровно одна неограниченная *внешняя грань*, которая визуально сильно отличается от всех остальных, а в сферическом изображении такой грани нет.
- Грань сферического изображения графа, содержащая северный полюс будет соответствовать при стереографической проекции внешней грани плоского изображения.
- Таким образом, перемещая северный полюс на разные грани, можно любую грань сферического изображения сделать внешней гранью в плоском изображении графа. Это лишний раз подчеркивает, что на самом деле внешняя грань не отличается от остальных.

## Граница грани

• Рассмотрим ребро $e$ плоского графа $G$. Либо по разные стороны от $e$ расположены разные грани (тогда ребро $e$ — *граничное* ребро этих двух граней), либо по обе стороны от $e$ — одна и та же грань, тогда назовем ребро $e$ *внутренним* ребром этой грани. Обозначим через $E_d$ множество всех граничных и внутренних рёбер грани $d$.

• *Граничные вершины* грани $d$ — это концы ребер из $E_d$. Обозначим множество граничных вершин грани $d$ через $V_d$.

• Граничные и внутренние рёбра грани $d$ — это в точности те рёбра, до которых от внутренней точки грани $d$ можно дойти по ломаной, не пересекая изображение графа.

• Граничные вершины грани $d$ — это в точности те вершины, до которых можно дойти по ломаной от внутренних точек этой грани, не пересекая её граничных и внутренних рёбер.

• *Граница* грани $d$ — это подграф $B(d)$ графа $G$ с множеством вершин $V_d$ и множеством рёбер $E_d$.

• *Размер границы* грани $d$ мы определим, как количество граничных рёбер этой грани плюс удвоенное количество внутренних рёбер. Обозначать эту величину будем через $b(d)$.

### Свойство 1

*Если сложить размеры границ всех граней, получится удвоенное количество рёбер.*

Доказательство. Внутреннее ребро грани два раза считается в размере границы этой грани. Граничное ребро двух граней по разу считается в их размерах. □

### Свойство 2

*Любые две точки на границе грани $d$ можно соединить ломаной, проходящей в $d$.*

Доказательство. Пусть $A$ — внутренняя точка грани $d$. От нее можно провести ломаные, не пересекающие изображение $G$ до любых двух граничных. Все точки на этих ломаных лежат в $d$. □

## Свойство 3

*Если две точки $A$ и $B$ на изображении графа $G$ можно соединить ломаной $L$, не пересекающей изображения $G$, то $A$ и $B$ лежат на границе некоторой грани.*

Доказательство. $A$ и $B$ лежат на границе грани $d$, содержащей все внутренние точки $L$ (см. рисунок a). □

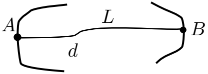
## Определение

Рассмотрим любую вершину $a$ плоского графа $G$ и упорядочим выходы ребер из $a$ по часовой стрелке. Два ребра, выходы которых — соседние в этом порядке, будем называть *соседними в вершине $a$*.

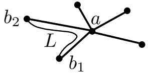
## Свойство 4

*Пусть $ab_1$ и $ab_2$ — два соседних ребра в вершине $a$. Тогда рёбра $ab_1$ и $ab_2$ лежат в границе некоторой грани.*

Доказательство. вершины $b_1$ и $b_2$ можно соединить ломаной вдоль $b_1ab_2$, не пересекающей изображения $G$ (см. рисунок b). Поэтому, рёбра $ab_1$ и $ab_2$ лежат в границе некоторой грани. □



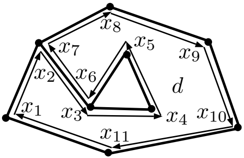
a



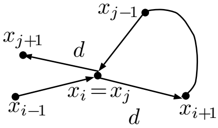
b

• Пусть $G$ — плоский граф, $d \in F(G)$, а $x_1x_2 \in E_d$.

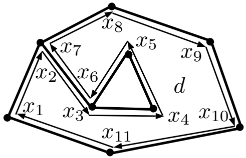
• Пройдем по ребру $x_1x_2$ от $x_1$ к $x_2$. НУО справа по ходу движения расположена грань $d$. Повернем в вершине $x_2$ направо до выхода соседнего ребра $x_2x_3$. (Если $d_G(x_2) = 1$, то $x_3 = x_1$, это нам не мешает.) Очевидно, $x_2x_3 \in E_d$. Пойдем по этому ребру от $x_2$ к $x_3$, справа опять будет расположена грань $d$. И так далее. В конечном итоге мы вернемся на ребро $x_1x_2$ (в вершину $x_1$ мы можем вернуться и раньше!). Получился замкнутый циклический маршрут (см. рис. a).



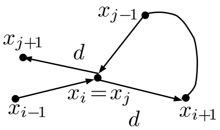

a




b

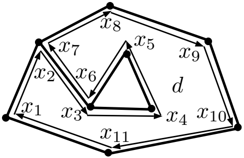



a

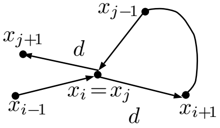



b

- Пусть получился циклический маршрут $Z = x_1x_2 \dots x_k$. Рассмотрим вершину $x_i$. по построению, $Z$ обходит вокруг $x_i$ — скажем, против часовой стрелки. Пусть мы вышли из вершины $x_i$ по ребру $x_ix_{i+1}$, а следующий раз вернулись в эту вершину по ребру $x_{j-1}x_j$ (в этом случае $x_i = x_j$, см. рис. b).
- Тогда сектор между выходами рёбер $x_ix_{i+1}$ и $x_jx_{j-1}$ из вершины $x_i = x_j$ не принадлежит грани $d$. Следовательно, $Z$ проходит все рёбра из $E_d$, инцидентные вершине $x_i$. Поскольку это верно для любой вершины $Z$, этот маршрут обходит все рёбра одной из компонент графа $B(d)$.
- Обозначим через $Z(U)$ такой маршрут для компоненты $U$, а через $Z(d)$ — объединение построенных маршрутов для всех компонент $B(d)$.




a




b

- Если маршрут $Z(d)$ проходит ребро $e$ дважды, то, очевидно, в разных направлениях. Значит, по обе стороны от $e$ расположена грань $d$, то есть $e$ — внутреннее ребро $d$.

- Пусть $e$ — внутреннее ребро грани $d$ (см. ребро $x_2x_3 = x_6x_7$ на рисунке). Тогда при проходе по $e$ в любом из направлений справа будет расположена грань $d$. Поэтому, маршрут $Z(d)$ дважды пройдет $e$ — в обоих направлениях.

## Лемма 1

*Для плоского графа $G$ выполнены следующие утверждения.*

1) *Если $d \in F(G)$ и $B(d)$ несвязна, то разные компоненты связности графа $B(d)$ лежат в разных компонентах связности графа $G$.*

2) *Граф $G$ несвязен, если и только если он имеет грань с несвязной границей.*

Доказательство. 1) • Пусть $B_1$ и $B_2$ — две компоненты $B(d)$. Изображение компоненты $B_1$ ограничено и не пересекает других компонент $B(d)$. Следовательно, изображение $B_1$ можно отделить от изображения $B_2$ замкнутой ломаной в грани $d$, не пересекающей ребер $G$ (такую ломаную можно построить, почти повторив маршрут $Z(B_1)$: вместо каждого прохода по ребру, проведем его копию на малом расстоянии $\delta$ в грани $d$, как в доказательстве теоремы Жордана).

• Значит, между $B_1$ и $B_2$ нет пути в графе $G$.

2) Очевидно, можно обойти все грани графа $G$, каждый раз переходя в грань имеющую с предыдущей общую сторону или вершину (достаточно отметить по внутренней точке на каждой грани и проложить на плоскости маршрут, все эти точки обходящий).

• Тогда, если граница каждой грани связна, то связно и их объединение, а это граф $G$, противоречие. Значит, несвязный граф имеет грань с несвязной границей.

• Если $G$ имеет грань с несвязной границей, то $G$ несвязен по пункту 1. $\square$

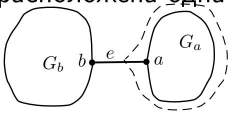
## Лемма 2

*Внутренние рёбра граней плоского графа $G$ — в точности все мосты графа $G$.*

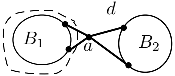
Доказательство. • Пусть внутреннее ребро $e$ грани $d$ — не мост, тогда оно лежит в простом цикле $C$. По теореме Жордана цикл делит плоскость на две области, а грань $d$ может лежать только в одной из них.

• Наоборот, пусть $e = ab$ — мост. Тогда граф $G - e$ имеет две компоненты $G_a$ и $G_b$, содержащие $a$ и $b$ соответственно.

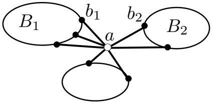
• Изображение компоненты $G_a$ ограничено и не пересекает $G_b$, значит, существует замкнутая ломаная $P$ в грани $d$, отделяющая $G_a$ от $G_b$ (см. рис. а). Очевидно, $P$ пересекает ребро $e$, а значит, по обе стороны от моста $e$ расположена одна и та же грань. □




a




b




c

## Лемма 3

*Пусть $d$ — грань реберно двусвязного графа $G$. Тогда $B(d)$ — цикл (не обязательно простой).*

Доказательство. • Так как $G$ связен, $B(d)$ — связный граф по Лемме 1. Значит, и $Z(d)$ связен. Так как внутренних рёбер у $d$ нет (граф не имеет мостов), $Z(d)$ — цикл. □

• Докажем, что граница грани почти всегда однозначно задает эту грань.

## Лемма 4

*Если две разные грани $f$ и $f'$ плоского графа $G$ имеют одинаковые границы, то $G$ — простой цикл.*

Доказательство. • Пусть $B$ — общая граница этих граней, $e \in E(B)$. По Лемме 2 тогда $e$ — не мост графа $G$, а значит, существует простой цикл $Z$, содержащий $e$.

• Тогда $Z$ делит плоскость на две области — $O \supset f$ и $O' \supset f'$.

• Пусть $e' \in B \setminus Z$. Тогда $e'$ лежит внутри одной из областей $O$ и $O'$ — скажем, в $O'$. В этом случае, $e'$ не может быть граничным ребром грани $f \subset O$, противоречие.

• Следовательно, $B \subset Z$.

• Докажем, что $G = Z$, тогда $G$ — простой цикл.

• Если $f = O$ и $f' = O'$, то $G = Z$, что нам и нужно.

• Пусть, скажем, $f \neq O$.

• Так как каждая грань целиком лежит в одной из областей, $O$ разбивается на грани.

• Значит, существует еще одна грань $f^* \subset O$.

• Пусть $X \in f$ и $X^* \in f^*$.

• Так как точки $X$ и $X^*$ лежат в области $O$, их можно соединить ломаной $L$, проходящей в $O$.

• Пойдем по ломаной $L$ от точки $X$. В некоторый момент мы перейдем из $f$ в другую грань. Значит, мы пересечем изображение графа $G$ — скажем, ребро $e$.

• Тогда $e$ — граничное ребро грани $f$. Но при этом $e$ изображено внутри $O$ (там проходит ломаная $L$), следовательно, $e \notin E(Z)$. Противоречие с доказанным выше.
$\square$

## Лемма 5

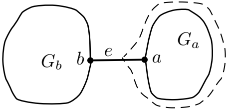
*Пусть $G$ — плоский граф.*

*1) Если грань $d$ и ее граничная вершина $a$ таковы, что $B_1$ и $B_2$ — разные компоненты графа $B(d) - a$, то $B_1$ и $B_2$ лежат в разных компонентах графа $G - a$. В частности, $a$ — точка сочленения графа $G$.*

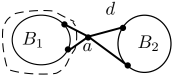
*2) Граф $G$ без петель вершинно двусвязен, если и только если границы его граней — простые циклы.*

**Доказательство.** 1) Аналогично доказательству Леммы 1, плоское изображение $B_1$ можно отделить от изображения $B_2$ ломаной, не пересекающей ребер $G - a$ (см. рис. b), а значит, между $B_1$ и $B_2$ нет рёбер в графе $G - a$.

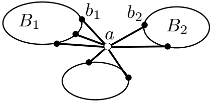
- Следовательно, $a$ — точка сочленения графа $G$.



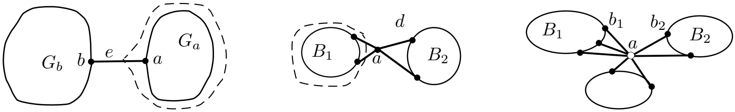

a




b




c




a b c

2) • Пусть $a$ — точка сочленения графа $G$. Рассмотрим плоское изображение несвязного графа $G - a$, полученное из $G$ удалением вершины $a$.

• В силу Леммы 1 граф $G - a$ имеет несвязную грань $d$, а граф $G$ не имеет. Значит, $a$ лежит на грани $d$ и смежна со всеми компонентами ее границы.

• Упорядочим выходы ребер из $a$ по часовой стрелке. Тогда есть два соседних ребра, выходящих к разным компонентам графа $B(d)$ — скажем, ребро $ab_1$ к компоненте $B_1$ и ребро $ab_2$ к компоненте $B_2$ (см. рис. c).

• Точка сочленения $a$ отделяет $b_1$ от $b_2$ в графе $G$. Существует грань $f$ графа $G$, граница которой содержит $a$, $b_1$ и $b_2$. Тогда $a$ — точка сочленения $B(f)$.

• Наоборот, если грань $d$ такова, что $B(d)$ имеет точку сочленения, то по пункту 1 граф $G$ также имеет точку сочленения.

# Грани трёхсвязного графа

## Определение

• Цикл $C$ графа $G$ — *неразделяющий*, если граф $G - V(C)$ связен.

• Цикл $C$ — *индуцированный*, если он не имеет хорд (то есть, является индуцированным подграфом на своем множестве вершин).

## Лемма 6

*Пусть $G$ — трёхсвязный плоский граф. Тогда множество границ его граней есть в точности множество его неразделяющих индуцированных циклов.*

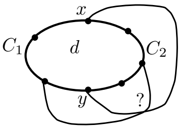
Доказательство. $\supset$. Пусть $C$ — неразделяющий индуцированный цикл в $G$. Тогда в одной из областей, на которые $C$ делит плоскость — назовём ее $d$ — нет вершин графа $G$. Так как индуцированный цикл $C$ не имеет диагоналей, внутри $d$ рёбер тоже нет. Значит $d$ — грань, а цикл $C$ — её граница.

$\subset$. • Пусть $C$ — граница грани $d$ графа $G$. Тогда $C$ — простой цикл.

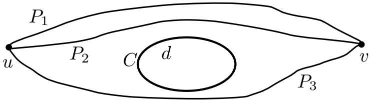
• Предположим, что $C$ имеет диагональ $xy$. Вершины $x$ и $y$ делят цикл $C$ на две дуги $C_1$ и $C_2$.

• Граф $G - x - y$ должен быть связен ввиду трёхсвязности графа $G$. Значит, в $G - x - y$ есть $C_1C_2$-путь $P$.

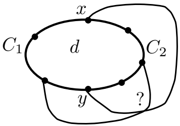
• Понятно, что и диагональ $xy$, и путь $P$ должны проходить вне грани $d$, но тогда они пересекаются (см. рис. a), что невозможно.



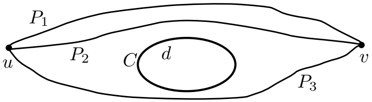

a




b




a




b

• Докажем, что граф $G - V(C)$ связен.

• Пусть $u, v \in V(G) \setminus V(C)$. По теореме Уитни в трёхсвязном графе $G$ существуют три независимых $uv$-пути $P_1$, $P_2$ и $P_3$, которые делят плоскость на три области.

• Грань $d$ лежит в одной из этих областей, пусть это область, граница которой образована путями $P_2$ и $P_3$ (см. рис. b). Тогда $P_1$ не пересекается с границей грани $d$ — циклом $C$ — а значит, вершины $u$ и $v$ связаны в $G - V(C)$.

• Таким образом, граница грани графа $G$ является индуцированным неразделяющим циклом. $\square$

## Разные изображения одного графа. Изоморфизм



• Слева и справа на рисунке — плоские изображения одного и того же графа. Но это разные изображения! У правого изображения есть грань, в границе которой 6 вершин, а у левого — нет.

### Определение

Пусть $G$ и $G'$ — два плоских графа, а биекция $\varphi : V(G) \to V(G')$ удовлетворяет следующим условиям.

(1) $xy \in E(G) \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E(G')$;

(2) $U \subset V(G)$ является множеством граничных вершин некоторой грани графа $G$, если и только если $\varphi(U) = \{\varphi(x) \ : \ x \in U\}$ является множеством граничных вершин некоторой грани графа $G'$.

Тогда $\varphi$ — *изоморфизм плоских графов* $G$ и $G'$, а сами эти плоские графы *изоморфны*.

## Теорема 2

**(H. Whitney, 1933.)** *Любые два плоских изображения трёхсвязного планарного графа $G$ изоморфны как плоские графы.*

Доказательство. • Пусть $G_1$ и $G_2$ плоские изображения $G$, причем $x_1 \in V(G_1)$ и $x_2 \in V(G_2)$ — изображения вершины $x \in V(G)$.

• Определим отображение $\varphi : V(G_1) \to V(G_2)$ так: $\varphi(x_1) = x_2$ для любой вершины $x_1 \in V(G_1)$. Очевидно, $x_1y_1 \in E(G_1) \iff xy \in E(G) \iff \varphi(x_1)\varphi(y_1) = x_2y_2 \in E(G_2)$.

• По Лемме 6 границы граней плоского графа $G_1$ — это в точности неразделяющие индуцированные циклы графа $G_1$, а границы граней плоского графа $G_2$ — это в точности неразделяющие индуцированные циклы $G_2$. Это свойство не имеет отношения к плоскому изображению.

• $U_1 \subset V(G_1)$ — множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в $G_1$ (то есть, границы грани $G_1$) $\iff$ $U \subset V(G)$ множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в $G$ $\iff$ $\varphi(U_1) = U_2 \subset V(G_2)$ — множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в $G_2$ (то есть, границы грани $G_2$).

• Следовательно, $\varphi$ — изоморфизм плоских графов.

## Формула Эйлера

• В разных плоских изображениях планарного графа $G$ могут получаться разные грани. Однако их количество является инвариантом графа, как говорит нам формула Эйлера.

### Теорема 3

**(L. Euler, 1752.)** *Пусть $G$ — плоский граф с $v$ вершинами, $e$ рёбрами и $f$ гранями, имеющий $k$ компонент связности. Тогда $v - e + f = 1 + k$.*

Доказательство. Индукцией по количеству рёбер.

База для случая, когда граф $G$ — лес, очевидна: в этом случае $f = 1$, $e = v - k$.

Переход • Пусть для меньших графов формула Эйлера уже доказана и $G$ — не лес.

• Тогда в графе есть цикл, пусть ребро $\ell$ входит в цикл. Так как $\ell$ — не мост, по ребру $\ell$ граничат две разные грани, которые объединяются в одну в графе $G - \ell$.

• Таким образом, в графе $G - \ell$ $v$ вершин, $k$ компонент, $e - 1$ ребро и $f - 1$ грань. Теперь формула Эйлера для $G$ следует из формулы Эйлера для $G - \ell$, которая верна по индукционному предположению.

• Мы будем обозначать количество вершин, рёбер и граней плоского графа $G$ буквами $v$, $e$ и $f$ соответственно.

## Следствие 1

*Пусть $G$ — планарный граф без петель и кратных рёбер, $v \geq 3$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $e \leq 3v - 6$.

2) *Если граф $G$ — двудольный, то $e \leq 2v - 4$.*

Доказательство. 1) • Докажем, что размер границы каждой грани графа $G$ не менее 3. В самом деле, пусть $d \in F(G)$, $b(d) \leq 2$.

• Так как петель и кратных рёбер нет, $B(d)$ не имеет циклов. Следовательно, все рёбра внутренние. Тогда такое ребро всего одно, а значит, $e = 1$ и утверждение очевидно.

• Сумма размеров границ всех граней равна $2e$, а размер каждой границы не менее 3. Следовательно, $2e \geq 3f$ или $f \leq \frac{2e}{3}$.

• Тогда из формулы Эйлера $v - \frac{e}{3} = v - e + \frac{2e}{3} \geq v - e + f \geq 2$, откуда следует доказываемое неравенство.

2) • Докажем, что размер границы каждой грани двудольного графа $G$ не менее 4.

• В самом деле, пусть $d \in F(G)$, $b(d) \le 3$. Поскольку в двудольном графе нет циклов длины 3, и в $G$ нет кратных рёбер, все рёбра внутренние. Тогда такое ребро всего одно, а значит, $e = 1$ и утверждение очевидно.

• Сумма размеров границ всех граней равна $2e$, а размер каждой границы не менее 4. Следовательно, $f \le \frac{e}{2}$.

• Тогда из формулы Эйлера $v - \frac{e}{2} = v - e + \frac{e}{2} \ge v - e + f \ge 2$, откуда следует доказываемое неравенство. □

## Следствие 2

*Пусть $G$ — планарный граф без петель и кратных рёбер. Тогда $\delta(G) \le 5$.*

Доказательство. • В случае $v \le 2$ утверждение очевидно.

• Пусть $v \ge 3$ и при этом $\delta(G) \ge 6$. Тогда $6v \le 2e$, то есть, $e \ge 3v$ — противоречие со Следствием 1. □

## Следствие 3

*$K_5$ и $K_{3,3}$ — непланарные графы.*

Доказательство. 1) Пусть $K_5$ планарен. Для этого графа $v = 5$, $e = 10$. По пункту 1 следствия 1 мы имеем $10 = e \leq 3v - 6 = 9$, что неверно.

2) Пусть $K_{3,3}$ планарен. Для этого двудольного графа $v = 6$, $e = 9$. По пункту 2 следствия 1 мы имеем $9 = e \leq 2v - 4 = 8$, что неверно. $\square$

## Определение

• Граф $H'$ называется *подразбиением* графа $H$, если $H'$ может быть получен из $H$ заменой некоторых рёбер на простые пути (каждое заменяемое ребро $xy$ меняется на простой $xy$-путь). При этом, все добавлямые вершины различны и имеют степень 2.

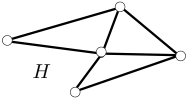
• Вершины $H$ в графе $H'$ называются главными.

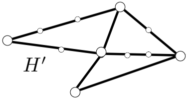
• $G \supset H$ означает, что граф $G$ имеет подграф, изоморфный подразбиению графа $H$.

## Следствие 4

1) *Подразбиение графа H планарно, если и только если H планарен.*
2) *Любое подразбиение графа $K_5$ или $K_{3,3}$ непланарно.*

Доказательство. 1) Изображение как ребра, так и простого пути — ломаная.
2) Следует из пункта 1 и Следствия 3. □



## Лемма 7

*Пусть $x, y \in V(G)$, $xy \in E(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*
*1) Если $G \cdot xy \supset K_{3,3}$, то $G \supset K_{3,3}$.*
*2) Если $G \cdot xy \supset K_5$, то $G \supset K_5$ или $G \supset K_{3,3}$.*

Доказательство. • Пусть $w = x \cdot y$, а $H$ — подграф $G \cdot xy$, являющийся подразбиением $K_{3,3}$ или $K_5$.

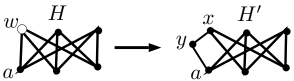
• Если $w \notin V(H)$ то, очевидно, $G \supset K_{3,3}$ или $G \supset K_5$, соответственно.

• Далее $w \in V(H)$. Построим подграф $H'$ графа $G$ следующим образом: $V(H') = V(H) \setminus \{w\} \cup \{x, y\}$. Все рёбра из $E(H)$, не инцидентные $w$, включим в $E(H')$. Для каждого ребра $aw \in E(H)$ включим его в $E(H')$ то из ребер $ax$ или $ay$, которое есть в графе $G$ (если есть оба этих ребра, возьмем любое из них). Наконец, поместим в $E(H')$ ребро $xy$.

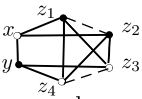
• Рёбра графа $H' - xy$, инцидентные вершине $x$, назовем *красными*, а рёбра графа $H' - xy$, инцидентные вершине $y$ — *синими*. Вместе красных и синих рёбер ровно $d_H(w)$.

• Если в графе $H'$ нет синих рёбер, то $H' - y$ — подграф графа $G$, изоморфный $H$. Аналогично для красных рёбер. В этом случае доказательство леммы закончено.

• Пусть $ay$ — единственное синее ребро в $H'$. Тогда ребру $aw \in E(H)$ соответствует путь $ayx$ в графе $H'$, то есть, $H'$ является подразбиением графа $H$ (см. рис. a). В этом случае лемма доказана, аналогично для случая, когда есть ровно одно красное ребро.




a




b

• Пусть теперь и красных, и синих рёбер не менее, чем по два. Тогда $d_H(w) \geq 4$, откуда сразу же следует, что $H \supset K_5$, $d_H(w) = 4$.

• Пусть тогда $z_1, z_2, z_3, z_4$ — четыре оставшиеся главные вершины графа $H$. Каждая пара из вершин $w, z_1, z_2, z_3, z_4$ соединена в $H$ путём — подразбиением соответствующего ребра графа $K_5$. Разные пути не имеют общих внутренних вершин. Этим путям соответствуют пути в графе $H'$.

• НУО в $H'$ есть $xz_1$-путь, $xz_2$-путь, $yz_3$-путь и $yz_4$-путь (см. рис. b). Тогда $H' \supset K_{3,3}$: каждая из вершин $x, z_3, z_4$ соединена путём с каждой из вершин $y, z_1, z_2$, разные пути не имеют общих внутренних вершин. $\square$

## Теорема 4

**(K. Kuratowski, 1930)** *Граф $G$ (возможно, имеющий кратные рёбра и петли) непланарен, если и только если $G$ имеет подграф, являющийся подразбиением $K_5$ или $K_{3,3}$.*

Доказательство. $\Leftarrow$. Следствие 4.

$\Rightarrow$. • Предположим противное и рассмотрим минимальный контрпример $G$ (непланарный граф, не содержащий подразбиений $K_5$ и $K_{3,3}$).

• Любой не содержащий подразбиений $K_5$ и $K_{3,3}$ граф с меньшим чем $G$ числом вершин или с таким же, как у $G$ числом вершин и меньшим числом рёбер обязательно является планарным.

## Утверждение 1

*$G$ не имеет петель и кратных рёбер.*

Доказательство. • Пусть $e$ — петля графа $G$. Тогда граф $G - e$ планарен и из его планарности следует планарность графа $G$ (можно дорисовать петлю к плоскому изображению $G - e$).

• Теперь пусть $G$ имеет два кратных ребра $e$ и $f$. Тогда граф $G - e$ планарен и из его планарности следует планарность графа $G$ (можно дорисовать ребро $e$ вдоль ребра $f$ в плоском изображении $G - e$).

## Утверждение 2

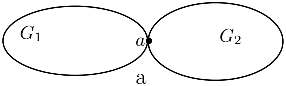
*$G$ трехсвязен.*

Доказательство. • Если $G$ несвязен, то его компоненты не содержат подразбиений $K_5$ и $K_{3,3}$, а значит, планарны. Тогда планарен и граф $G$, противоречие.

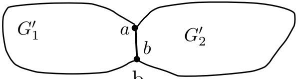
• Пусть $G$ имеет точку сочленения $a$. Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\}$.

• Графы $G_1$ и $G_2$ не содержат подразбиений $K_5$ и $K_{3,3}$, а значит, планарны.

• Тогда планарен и граф $G$ (можно изобразить $G_1$ и $G_2$ так, чтобы $a$ оказалась на границе внешней грани обоих изображений и склеить их, см. рисунок а). Противоречие.

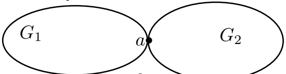



a

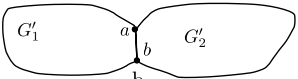



b

- Наконец, пусть $G$ двусвязен, но имеет разделяющее множество $S = \{a, b\}$. Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $V(G_1) \cap V(G_2) = S$. Пусть $G_i' = G_i + ab$.
- Предположим, что $G_1'$ содержит подграф $H$ — подразбиение графа $K_5$ или $K_{3,3}$. Так как $H$ не может быть подграфом $G$, $ab \in E(H) \setminus E(G)$.
- Однако, $G$ содержит $ab$-путь $P$ по вершинам $G_2$. Заменив в $H$ ребро $ab$ на путь $P$, мы получим подразбиение $H'$ графа $H$, являющееся подграфом $G$. Тогда $G$ содержит подразбиение $K_5$ или $K_{3,3}$, что не так.
- Таким образом, $G_1'$ не содержит подразбиений $K_5$ и $K_{3,3}$, а значит, $G_1'$ планарен. Аналогично, $G_2'$ планарен.
- Тогда можно изобразить эти графы на плоскости так, чтобы ребро $ab$ в обоих изображениях лежало в границах внешних граней и склеить эти изображения (см. рис. b). Противоречие. $\square$



a

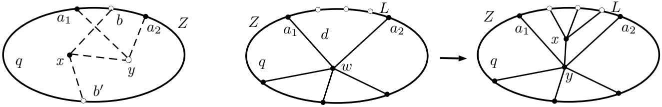


b

- Вернемся к доказательству теоремы.
- Очевидно, $G \neq K_4$. По Теореме 4.9 существует такое ребро $xy \in E(G)$, что граф $G \cdot xy$ трёхсвязен, пусть $w = x \cdot y$.
- По Лемме 7 мы имеем $G \cdot xy \not\supset K_5$, $G \cdot xy \not\supset K_{3,3}$, следовательно, граф $G \cdot xy$ планарен.
- Пусть $G' = G \cdot xy - w \simeq G - x - y$ (изоморфность этих двух графов очевидна).
- Рассмотрим плоское изображение графа $G'$, получающееся из изображения $G \cdot xy$ удалением вершины $w$, пусть $q$ — грань $G'$, на которой расположена вершина $w$.
- Граф $G'$ двусвязен, поэтому граница грани $q$ — это простой цикл $Z$.
- Отметим на $Z$ вершины, смежные с $y$ (обозначим их множество через $A$) и пронумеруем их в циклическом порядке: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Из трёхсвязности $G$ следует, что $n \geq 2$. Пусть $B$ — множество вершин цикла $Z$, смежных с $x$.
- Если $A = B$ то $n \geq 3$ (так как граф $G - A$ в этом случае несвязен), тогда $G$ содержит подразбиение $K_5$ с главными вершинами $x, y, a_1, a_2, a_3$, противоречие.
- Далее НУО $B \not\subset A$ пусть вершина $b \in B \setminus A$ лежит на дуге $L = a_1 Z a_2$, не содержащей других вершин из $A$.

• Предположим, что вершина $b' \in B$ не лежит на $L$ (возможно, $b'$ совпадает с одной из вершин множества $A$, но $b' \notin \{a_1, a_2\}$).

• Тогда циклический порядок вершин $a_1, b, a_2, b'$ на $Z$ именно такой, а значит, $G$ содержит подразбиение $K_{3,3}$ с главными вершинами $x, a_1, a_2$ (одна доля) и $y, b, b'$ (вторая доля), противоречие (см. рис. a).




a b c

• Остается случай, когда все вершины множества $B$ лежат на дуге $L$ (возможно, совпадают с $a_1$ или $a_2$).

• В этом случае рассмотрим исходное плоское изображение графа $G \cdot xy$ и удалим с него все ребра от $w$ до вершин из $B \setminus A$ (см. рис. b).

• Ребра от $A$ до $w$ делят грань $q$ на $n$ граней, одна из них — грань $d$, ограниченная $L$ и ребрами $wa_1$, $wa_2$.

• Мы можем изобразить внутри $d$ вершину $x$ и соединить ее ребрами с $w$ и вершинами из $B$, не нарушая планарности (см. рис. c). Для построения плоского изображения $G$ остается только переименовать $w$ в $y$. □

# Триангуляции

## Определение

1) Будем называть грань *треугольником*, если ее граница — это треугольник.
2) Плоский граф называется *триангуляцией*, если каждая его грань — треугольник. Кратные рёбра и петли запрещены.
3) *Триангулировать* плоский граф значит провести в нём дополнительные рёбра так, чтобы получилась триангуляция.

• По Лемме 5 триангуляция — двусвязный граф.

## Лемма 8

*Пусть $G$ — плоский граф без петель, $v(G) \geq 3$, никакие два кратных ребра не образуют грань. Тогда $G$ можно триангулировать без появления новых пар кратных ребер.*

Доказательство. • Пусть $G$ — не триангуляция. Тогда $G$ имеет грань $d$, не являющуюся треугольником. Пусть $H = G(V_d)$.

• По Лемме 1 любые две вершины из $V_d$ можно соединить ломаной в $d$, эта ломаная не будет пересекать ребер графа $G$.

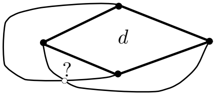
• Значит, если граф $H$ неполный, то мы можем добавить в него ребро без образования новых пар кратных ребер.

• Пусть $H = K_m$. Так как $|V_d| \geq 3$ и граф $H$ планарен, $m \in \{3, 4\}$.

• Если граница $B(d)$ грани $d$ недвусвязна, то ее точка сочленения по Лемме 5 — точка сочленения графа $G$, но это невозможно в случае, когда $V_d$ — клика.

• Следовательно, $B(d)$ — двусвязный граф, а значит, это простой цикл.

• Так как $B(d)$ — не треугольник, это цикл длины 4. Тогда две диагонали этого цикла проведены вне грани $f$, что, очевидно, невозможно: такие диагонали пересекут друг друга (см. рисунок). □




• Пусть у триангуляции $T$ $2n$ граней, тогда у нее $3n$ рёбер. По формуле Эйлера $v = n + 2$. Тогда $e(T) = 3v(T) - 6$.

• Мы знаем, что для любого плоского графа $G$ выполнено $e(G) \leq 3v(G) - 6$. Таким образом, триангуляция — максимальный плоский граф, в котором нельзя дорисовать без пересечений ни одного нового ребра.

## Лемма 9

*В любой триангуляции $T$ с $v(T) \geq 4$ есть ребро $e$, входящее ровно в два треугольника — в две грани, граничащие по $e$.*

Доказательство. • Любое ребро $f \in E(T)$ входит в две грани, и эти грани граничат только по $f$ (иначе в $T$ есть пара кратных рёбер). Значит, нам достаточно найти ребро $e$, не входящее в *разделяющий* треугольник — такой, что в обеих частях плоскости относительно него есть вершины графа.

• Если в $T$ нет разделяющего треугольника, то утверждение очевидно — нам подойдет любое ребро.

• Предположим, что разделяющие треугольники есть и рассмотрим такой разделяющий треугольник $abc$, что внутри него нет других разделяющих треугольников.

• Однако, внутри $abc$ есть вершины, а значит, есть и ребро $e$. Тогда ребро $e$ не может входить в разделяющий треугольник, так как такой треугольник содержался бы внутри $abc$, что противоречит выбору $abc$.

# Изображение с прямыми рёбрами

## Теорема 5

**(K. Wagner, 1936.)** *Пусть $G$ — планарный граф без кратных рёбер. Тогда существует плоское изображение $G$, в котором все рёбра – отрезки.*

Доказательство. • Будем доказывать утверждение индукцией по количеству вершин графа, база для графа на одной вершине очевидна.

• Достаточно доказать теорему для случая, когда $G$ — триангуляция, так как по Лемме 8 любой граф можно триангулировать без появления кратных рёбер. Будем доказывать, что можно выпрямить триангуляцию, тогда будет выпрямлен и исходный граф.

• По Лемме 9 выберем ребро $e = uv \in E(G)$ так, чтобы оно входило ровно в два треугольника — грани $xuv$ и $yuv$.

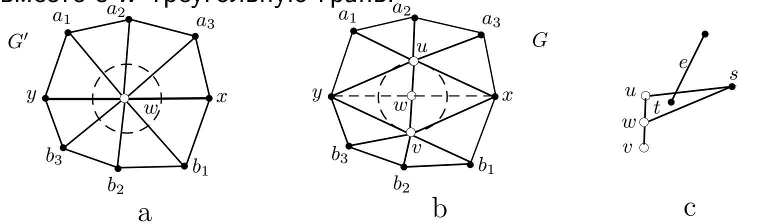
• Тогда $G' = G \cdot uv$ — триангуляция с плоским изображением, в котором "сжаты" грани $xuv$ и $yuv$, а остальные грани — такие же, как в $G$. Кратных рёбер в $G'$ нет.

• По индукционному предположению, существует изображение $G'$ с прямыми рёбрами. Далее рассматриваем его.

• Упорядочим вершины из $\mathrm{N}_G(u)$ в порядке выхода их рёбер из $u$ по часовой стрелке: $x, v, y, a_1, \dots, a_k$. Так как $G$ – триангуляция, любые две соседние в этом порядке вершины вместе с $u$ образуют треугольную грань.

• Упорядочим вершины из $\mathrm{N}_G(v)$ в порядке выхода их рёбер из $v$ по часовой стрелке: $y, u, x, b_1, \dots, b_m$. Так как $G$ – триангуляция, любые две соседние в этом порядке вершины вместе с $v$ образуют треугольную грань.

• Тогда в графе $G'$ вершины из $\mathrm{N}_{G'}(w)$ будут упорядочены по часовой стрелке в порядке выходов рёбер из $w$ так: $y, a_1, \dots, a_k, x, b_1, \dots, b_m$ (рис. a). Любые две соседние (по выходу ребра из $w$) вершины образуют вместе с $w$ треугольную грань.

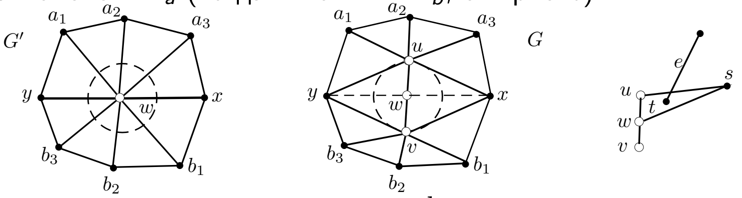


• Найдем минимум расстояний между вершинами в $G'$, а также минимум расстояний от вершин до не инцидентных им рёбер (напомним, что рёбра — это отрезки). Пусть $d$ — наименьший из этих минимумов. Очевидно, $d > 0$.

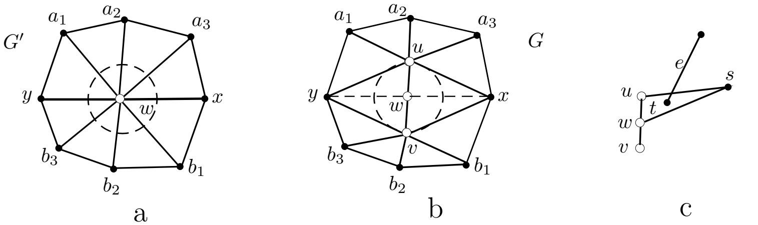
• Проведем окружность $S$ радиуса $\delta = \frac{d}{2}$ с центром $w$. Понятно, что внутри $S$ вершин графа $G'$ нет и пересекают эту окружность только рёбра с концом в $w$.

• Ломаная $xwy$ делит многоугольник $P = ya_1 \dots a_k x b_1 \dots b_m$ на два многоугольника: $P_a$, содержащий $a_1, \dots, a_k$ и $P_b$, содержащий $b_1, \dots, b_m$.

• Проведем диаметр $uv$ окружности $S$ так, чтобы $x$ и $y$ лежали по разную сторону от соответствующей прямой и $u$ лежала в $P_a$ (тогда $v$ лежит в $P_b$, см. рис. b).




a b c





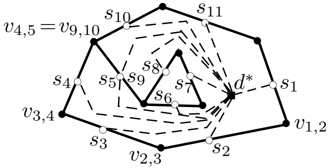

• Удалим все рёбра, инцидентные $w$, из графа. Теперь проведем отрезки от $u$ до $x$, $y$, $a_1, \dots, a_k$ и от $v$ до $x$, $y$, $b_1, \dots, b_m$ (см. рис. b). Очевидно, никакие два проведенных отрезка не пересекают друг друга.

• Остается доказать, что проведенные отрезки не пересекают других рёбер графа $G$.

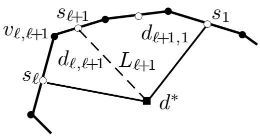
• Пусть, скажем, ребро $us$ пересекает какое-то другое ребро $e$ (см. рис. c). Стороны $sw$ и $wu$ треугольника $swu$ не могут пересекать $e$. Следовательно, один из концов $e$ — назовем его $t$ — лежит в треугольнике $swu$. Но тогда $t$ лежит в треугольнике $swu$ и расстояние от $t$ до отрезка $sw$, очевидно, меньше $|uw| = \frac{d}{2}$, противоречие.

## Лемма 10

*Пусть $G$ — связный плоский граф, $d \in F(G)$, Пусть $k = b(d)$, а $e_1 \dots e_k$ — рёбра из $E_d$ в порядке циклического обхода $Z(d)$ (нумерация — циклическая по модулю $k$, внутренние рёбра грани $d$ встречаются в этой нумерации дважды).*
*Отметим точку $d^*$ на грани $d$ и по точке $s_i$ на каждом ребре $e_i$. Тогда в грани $d$ можно провести ломаные $L_1, \dots, L_k$ без общих внутренних точек, соединяющие $d^*$ с $s_1, \dots, s_k$ соответственно. При этом, циклический порядок выходов ломаных в точке $d^*$ будет $L_1, \dots, L_k$ (см. рис. а).*




a




b

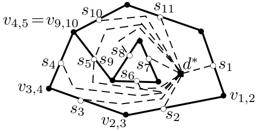
**Доказательство.** Рассмотрим отдельно от всего графа грань $d$ и добавим вершины $s_1, \dots, s_k, d^*$.

• Внутреннюю точку $d^*$ грани $d$ можно соединить ломаной $L_1$ в грани $d$ с точкой $s_1$ на границе грани. Далее пусть $k \ge 2$.

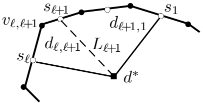
• Так как добавленное ребро $L_1 = d^* s_1$ — мост, это внутреннее ребро полученной грани $d_0$, в границу которой добавилась вершина $d^*$.

• Пусть $v_{i,i+1}$ — вершина, в которой обход $Z(d)$ переходит с ребра $e_i$ на ребро $e_{i+1}$.

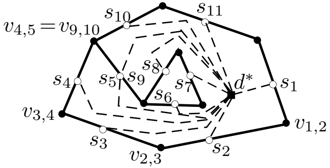
• Докажем индукцией по $2 \le \ell \le k$, что можно провести в грани $d$ описанные выше ломаные $L_1, L_2, \dots, L_\ell$ так, что грань $d$ будет разбита на грани $d_{1,2}, \dots, d_{\ell,1}$, причем границу $d_{i,i+1}$ образуют ломаные $L_i$ и $L_{i+1}$, а также участок циклического обхода $Z(d)$ между $s_i$ и $s_{i+1}$, содержащий $v_{i,i+1}$. Границу грани $d_{\ell,1}$ образуют ломаные $L_\ell$ и $L_1$, а также участок циклического обхода $Z(d)$ между $s_\ell$ и $s_1$, содержащий $v_{\ell,\ell+1}$.



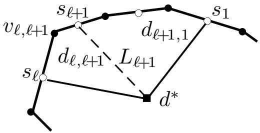

a




b




a




b

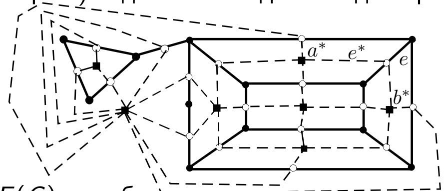
*База* для $\ell = 2$ очевидна — в грани $d_0$ можно провести ломаную $L_2$, соединяющую граничные точки $d^*$ и $s_2$. В результате ломаная $L_2L_1$ разобьет $d$ на две части $d_{1,2}$ и $d_{2,1}$, очевидно, обладающие нужными свойствами.

*Переход* $\ell \to \ell + 1$. Рассмотрим грань $d_{\ell,1}$. На ее границе лежат точки $d^*$ и $s_{\ell+1}$, которые можно соединить в грани $d_{\ell,1}$ ломаной $L_{i+1}$ (см. рис. b). В результате грань $d_{\ell,1}$ будет разбита этой ломаной на две грани $d_{\ell,\ell+1}$ и $d_{\ell+1,1}$ с нужными свойствами. $\square$

## Двойственный граф



- Пусть $G$ — связный плоский граф. Вершины *двойственного графа* $G^*$ будут соответствовать граням графа $G$: внутри каждой грани $a$ графа $G$ мы отметим соответствующую ей вершину $a^*$ графа $G^*$. Будем говорить, что вершина $a^*$ *двойственна* грани $a$.
- Зафиксируем на каждом ребре графа $G$ по точке, которую назовём *серединой* этого ребра. Точку $a^*$ можно соединить внутри грани $a$ непересекающимися ломаными с серединами всех входящих в границу грани $a$ рёбер, как описано в Лемме 10 (см. рис.). Сделаем так для каждой грани графа $G$.




- Пусть $e \in E(G)$ — ребро, по которому граничат две грани $a$ и $b$ графа $G$ (возможно, $a = b$). Ему будет соответствовать ребро $e^*$ двойственного графа $G^*$, соединяющее двойственные граням $a$ и $b$ вершины $a^*$ и $b^*$ и проходящее через середину ребра $e$. Назовём ребро $e^*$ *двойственным* к $e$.

• Если грани $a$ и $b$ совпадают (или, что равносильно, ребро $e$ — мост), то $e^*$ — петля.

• Вершины $a^*, b^* \in V(G^*)$ оказываются соединены таким количеством рёбер, сколько общих рёбер имеют границы граней $a$ и $b$.

• Таким образом, существует естественная биекция между рёбрами $G$ и рёбрами $G^*$ (каждому ребру графа $G$ ставится в соответствие двойственное). Следовательно, $e(G) = e(G^*)$.

• Граф $G^*$ зависит не только от графа $G$, но и от изображения этого графа на плоскости, потому мы определяем $G^*$ для плоского графа $G$. Для разных плоских изображений одного планарного графа могут получиться неизоморфные двойственные графы.

• Двойственный граф не зависит ни от того, какие точки мы выберем внутри граней исходного графа $G$, ни от того, какие точки мы назовем серединами рёбер. Нетрудно доказать, что получатся изоморфные плоские графы.

• Итак, вершины графа $G^*$ соответствуют граням графа $G$, а рёбра графа $G^*$ соответствуют рёбрам графа $G$. Чему в $G$ соответствуют грани $G^*$?

## Лемма 11

*Пусть $G$ — связный плоский граф. Тогда существует биекция между $V(G)$ и $F(G^*)$, которая ставит в соответствии каждой вершине $a \in V(G)$ грань $a^* \in F(G^*)$, содержащую $a$.*

Доказательство. • Рассмотрим грань $a^* \in F(G^*)$ и докажем, что на ней изображена хотя бы одна вершина графа $G$.

• Рассмотрим ребро $e^* \in E_{a^*}$. По построению его пересекает ребро $e$ графа $G$. Следовательно, часть изображения ребра $e$ лежит в грани $a^*$. По построению $e$ пересекает ровно одно ребро графа $G^*$ и ровно один раз, следовательно, хотя бы один конец $e$ (а это вершина графа $G$) лежит в $a^*$.

• Нам известно, что $f(G) = v(G^*)$, $e(G) = e(G^*)$. По формуле Эйлера, $v(G) + f(G) - e(G) = 2 = v(G^*) + f(G^*) - e(G^*)$, откуда следует, что $f(G^*) = v(G)$.

• Значит, на каждой грани $a^*$ плоского графа $G^*$ лежит ровно одна вершина графа $G$, которую мы и обозначим через $a$. □

В обозначениях Леммы 11 мы будем говорить, что вершина $a \in V(G)$ и грань $a^* \in F(G^*)$ *двойственны* друг другу.

## Лемма 12

*Пусть $G$ — связный плоский граф. Тогда $(G^*)^* \simeq G$.*

Доказательство. • Отметим на каждой грани $a^* \in F(G^*)$ двойственную ей вершину $a \in V(G)$ (это можно сделать по Лемме 11). На каждом ребре $e^* \in E(G^*)$ отметим в качестве середины как раз ту точку, что была использована при построении $G^*$.

• После этого от каждой вершин графа $G$ проведем "половинки" инцидентных ей ребер из $E(G)$, как раз до их середин. В результате будут в точности проведены ребра графа $G$, как на исходном изображении. Получится граф $G$.

• Итак, на каждой грани $a^* \in F(G^*)$ отмечена ровно одна вершина, которая соединена с некоторыми серединами ребер из $E(G^*)$ непересекающимися ломаными так, что для каждого ребра $e^* \in E(G^*)$ проведено двойственное ребро $e \in E(G)$.

• Следовательно, от точки $a$ на грани $a^* \in G^*$ проведены ломаные до всех середин ребер из $B(a^*)$, причем до граничных ребер — с одной, а до внутренних — с обеих сторон. Таким образом, построеннный граф $G$ — это двойственный граф $(G^*)^*$.

• Так как построение двойственного графа не зависит от выбора точек на гранях и середин ребер, $(G^*)^* \simeq G$.

## Раскраски карт

• Карта — связный плоский граф без мостов. Его грани иногда называют *странами*.

• Раскраска граней плоского графа $G$ называется *правильной*, если две грани, имеющие общее ребро, покрашены в разные цвета.

• Для плоского графа $G$ мы будем обозначать через $\chi^*(G)$ минимальное количество цветов, для которого существует правильная раскраска граней графа $G$.

• Нетрудно понять, что правильные раскраски граней плоского графа $G$ взаимно однозначно соответствуют правильным раскраскам вершин двойственного графа $G^*$. Поэтому $\chi^*(G) = \chi(G^*)$ и $\chi(G) = \chi^*(G^*)$.

• **Гипотеза четырёх красок. (F. Guthrie, 1852.)** Страны любой карты можно правильным образом покрасить в 4 цвета.

• 4CC эквивалентна следующему утверждению: $\chi(G) \le 4$ для любого планарного графа $G$ без петель.

# Теорема о 5 красках

## Теорема 6

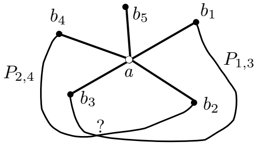
**(F. Kempe, 1879.)** *Для любого планарного графа $G$ без петель $\chi(G) \le 5$.*

Доказательство. • Индукция по $v(G)$, база для случая $v(G) \le 5$ очевидна. По Следствию 2 граф $G$ имеет вершину $a$ степени не более 5.

• Граф $G - a$ также планарен и по индукционному предположению мы знаем, что $\chi(G - a) \le 5$. Пусть $\rho$ — правильная раскраска вершин $G - a$ в 5 цветов.

• Если вершины из $\mathrm{N}_G(a)$ покрашены не более чем в 4 цвета, мы можем докрасить вершину $a$ и получить правильную раскраску вершин $G$.

• Остается случай, когда $\rho$ красит $\mathrm{N}_G(a)$ в 5 цветов. Тогда $d_G(a) = 5$, пусть $\mathrm{N}_G(a) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, причем соседи упорядочены по выходу рёбер из $a$ (по часовой стрелке). Не умаляя общности, можно считать, что $\rho(b_i) = i$ для всех $i \in [1..5]$.




• Пусть $G_{1,3}$ — индуцированный подграф $G - a$ на вершинах цветов 1 и 3, а $U$ — его компонента связности, содержащая $b_1$. Если во всех вершинах $U$ поменять местами цвета 1 и 3, раскраска останется правильной, а $b_1$ будет покрашена в цвет 3.

• Если в новой раскраске невозможно докрасить вершину $a$, в ее окрестности должен остаться цвет 1 — но в него может быть покрашена только вершина $b_3$ и только в случае $b_3 \in U$.

• Значит, достаточно рассмотреть случай, когда вершины $b_1$ и $b_3$ соединены путём $P_{1,3}$ по вершинам цветов 1 и 3 (см. рисунок).

• Аналогично, достаточно рассмотреть случай, когда вершины $b_2$ и $b_4$ соединены путём $P_{2,4}$ по вершинам цветов 2 и 4. Тогда пути $P_{1,3}$ и $P_{2,4}$ должны пересекаться, что, очевидно, невозможно. □

• В 1880 году Тэйт опубликовал свой подход к доказательству 4CC. Доказательство оказалась неверным, но теорема об эквивалентной переформулировке 4CC оказалась очень полезной: в последующих работах авторы доказывали не собственно 4CC, а эквивалентную переформулировку о рёберных раскрасках триангуляции.

## Определение

Пусть $T$ — триангуляция. Назовём *Тэйтовой раскраской* триангуляции $T$ такую раскраску рёбер $T$ в три цвета, что все рёбра каждой грани разноцветны.

• Далее рассматриваются графы без петель, иначе вопросы о правильной раскраске вершин бессмысленны.

## Теорема 7

**(P. G. Tait, 1880.)** *Четыре утверждения равносильны.*

$1^\circ$ *Для любого плоского графа $G$ выполняется $\chi(G) \le 4$.*

$2^\circ$ *Для любого рёберно двусвязного плоского графа $G$ выполняется $\chi^*(G) \le 4$.*

$3^\circ$ *Для любого рёберно двусвязного плоского кубического графа $G$ выполняется $\chi'(G) = 3$.*

$4^\circ$ *Для любой триангуляции $T$ существует Тэйтова раскраска.*

Доказательство. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Рёберно двусвязный граф $G$ не имеет мостов, следовательно, его двойственный граф $G^*$ не имеет петель. Тогда $\chi^*(G) = \chi(G^*) \le 4$.

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$. Очевидно, двойственный граф $T^*$ триангуляции $T$ является рёберно двусвязным кубическим графом, а правильная раскраска его рёбер в 3 цвета — Тэйтовой раскраской рёбер $T$.

$4^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Пусть $G$ — кубический рёберно двусвязный плоский граф. Очевидно, двойственный граф $G^*$ — триангуляция, а Тэйтова раскраска триангуляции $G^*$ является правильной раскраской рёбер $G$ в три цвета.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. • Пусть $G$ — плоский рёберно двусвязный кубический граф. У него есть правильная раскраска $\rho^*$ граней в 4 цвета. Поскольку всё равно, как нумеровать цвета, мы будем считать, что $\rho^*$ принимает значения из $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

• Так как $G$ — рёберно двусвязный граф, каждое ребро $e \in E(G)$ разделяет две разные грани $a$ и $b$. Мы положим $\rho'(e) = \rho^*(a) + \rho^*(b)$. Так как $a \neq b$, то $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$, следовательно, $\rho'(e) \neq (0,0)$. Таким образом, $\rho'$ — раскраска рёбер графа $G$ в три цвета.

• Докажем, что раскраска $\rho'$ — правильная. Пусть $v$ — вершина графа $G$, а $a, b, c$ — три содержащие её грани. Как уже отмечалось, все эти грани различны, любые две из них имеют общее ребро.

• Следовательно, $\rho^*(a)$, $\rho^*(b)$ и $\rho^*(c)$ — три разных цвета, откуда следует, что три цвета инцидентных вершине $v$ рёбер $\rho^*(a) + \rho^*(b)$, $\rho^*(a) + \rho^*(c)$, $\rho^*(b) + \rho^*(c)$ также различны.

• Таким образом, $\rho'$ — правильная раскраска рёбер $G$ в 3 цвета.

• Следовательно, $\chi'(G) = 3$ (так как очевидно, что $\chi'(G) \geq 3$).

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$. • Достаточно рассмотреть связный граф $G$ с $v(G) \ge 3$. По Лемме 8 граф $G$ является подграфом триангуляции $H$.

• Рассмотрим рёберно двусвязный кубический граф $H^*$. Существует правильная раскраска $\rho'$ рёбер этого графа в 3 цвета.

• Пусть $H^*_{i,j}$ — подграф $H^*$ на рёбрах цветов $i, j \in \{1, 2, 3\}$ в раскраске $\rho'$. Тогда $d_{H^*_{i,j}}(v) = 2$ для любой вершины $v \in V(H^*)$, следовательно, $H^*_{i,j}$ — объединение нескольких циклов.

• Легко видеть, что существует правильная раскраска $\rho^*_{i,j}$ граней графа $H^*_{i,j}$ в два цвета.

• Рассмотрим произвольную грань $a$ графа $H^*$. Пусть $a_{12}$ — грань $H^*_{12}$, частью которой является $a$, а $a_{13}$ — грань $H^*_{13}$, частью которой является $a$ (понятно, что $a_{12}$ и $a_{13}$ определены однозначно).

• Положим $\rho^*(a) = (\rho^*_{1,2}(a_{1,2}), \rho^*_{1,3}(a_{1,3}))$.

• Мы получили раскраску граней графа $H^*$ в четыре цвета.

- Покажем, что раскраска $\rho^*$ является правильной.

- Рассмотрим имеющие общее ребро $e$ грани $a$ и $b$ графа $H^*$, пусть $a = a_{1,2} \cap a_{1,3}$, $b = b_{1,2} \cap b_{1,3}$ — определённые выше представления в виде пересечений граней.

- Если $\rho'(e) \in \{1, 2\}$, то $a_{1,2} \neq b_{1,2}$, причём эти грани графа $H^*_{1,2}$ граничат по ребру $e$, следовательно, $\rho^*_{1,2}(a_{1,2}) \neq \rho^*_{1,2}(b_{1,2})$, а тогда и $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$.
- Если $\rho'(e) = 3$, то аналогично $\rho^*_{1,3}(a_{1,3}) \neq \rho^*_{1,3}(b_{1,3})$ и $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$.

- Таким образом, $\chi(G) \leq \chi(H) = \chi^*(H^*) \leq 4$, что и требовалось доказать. $\square$

## Теорема 8

*Пусть $G$ — плоский граф. Тогда $\chi^*(G) \le 2$ если и только если все вершины $G$ имеют четную степень.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть $d_G(a) = n$, упорядочим выходящие из $a$ ребра в порядке обхода по часовой стрелке: $ab_1, \dots ab_n$ (нумерация циклическая, некоторые из вершин $b_1, \dots b_n$ могут совпадать).

• Как мы знаем, каждая пара соседних ребер $ab_i$, $ab_{i+1}$ входит в границу одной грани — назовем ее $f_i$. Тогда для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ грани $f_i$ и $f_{i+1}$ — разного цвета, откуда очевидно следует, что $n$ четно.

$\Leftarrow$. Индукция по числу ребер графа.

*База* для графа без ребер очевидна.

*Переход.* • Пусть для меньших чем $G$ графов утверждение доказано.

• Так как все вершины графа $G$ имеют четную степень, в $G$ есть простой цикл $Z$.

• Тогда степени всех вершин графа $G' = G - E(Z)$ также четны, и грани $G'$ по индукционному предположению можно покрасить в два цвета правильным образом.

• Вернем на изображение цикл $Z$ — он делит плоскость на две области, внутри и вне цикла.

• Перекрасим все, что внутри $Z$, наоборот.

• Получится правильная раскраска граней графа $G$: любые две грани вне или внутри $Z$ с общим ребром по-прежнему покрашены в разные цвета.

• Цикл $Z$ разрезал некоторые грани графа $G$ и теперь их части, граничащие по ребрам $Z$, покрашены в разные цвета. $\square$

## Теорема о 3 красках



- Понятно, что триангуляция — недвудольный граф. А что можно сказать о раскраске вершин триангуляции в три цвета?
- В 1898 году Хивуд впервые высказал гипотезу о том, что вершины триангуляции можно правильно покрасить в 3 цвета, если и только если степени всех ее вершин четны.
- Это было доказано лишь много лет спустя.

### Теорема 9

**(Л. И. Головина, И. М. Яглом, 1961.)** *Пусть $T$ — плоская триангуляция. Тогда $\chi(T) = 3$, если и только если степени всех вершин $T$ четны.*

Доказательство. **(Е. Аксенова, 2024.)** • Отметим, что для любой вершины $a \in T$ граф $T(\mathrm{N}_T(a))$ содержит циклический маршрут длины $d_T(a)$ (так как концы соседних в плоском изображении рёбер, выходящих из $a$ — различны и смежны). Обозначим этот циклический маршрут через $Z_{T,a}$.

$\Rightarrow$. Пусть вершина $a$ имеет нечетную степень. Тогда $Z_{T,a}$ нечетен и для его правильной раскраски нужно задействовать все три цвета, но в этом случае невозможно покрасить вершину $a$.

$\Leftarrow$. Пусть все вершины $T$ имеют четную степень. Докажем существование правильной раскраски вершин $T$ в три цвета индукцией по $v(T)$.

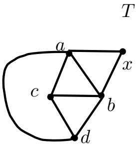
База для случая $v(T) = 3$ очевидна.

Переход. • Пусть $v(T) > 3$. Нам нужны две соседних треугольных грани $abc$ и $bcd$ такие, что $a \neq d$ и $ad \notin E(T)$.

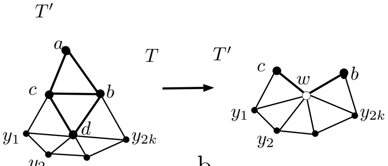
• Предположим, что одна из этих неприятностей с вершинами $a$ и $d$ случилась. Тогда цикл $abd$ (из двух кратных ребер при $a = d$ или треугольник при $ad \in E(T)$) делит плоскость на две части, в одной из них лежит вершина $c$ (см. рисунок а).

• Так как $v(T) > 3$, в другой части ребро $ab$ входит в грань $abx$. Очевидно $x \neq d$ (иначе $d_T(b) = 3 \not\vdots 2$, противоречие). Тогда $c \neq x$ и $cx \notin E(T)$.

• Таким образом, можно считать, что $a \neq d$ и $ad \notin E(T)$ (иначе рассмотрим грани $bac$ и $abx$).




a




b

• Рассмотрим меньшую триангуляцию $T' = (T - bc) \# ad$ (склеиваем вершины $a$ и $d$ в новую вершину $w$, склеиваем пары ребер $ab$ и $bd$, а также $ac$ и $cd$, см. рисунок b).

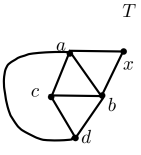
• Тогда все степени вершин $T'$ четны ($d_{T'}(ad) = d_T(a) + d_T(d) - 2$, $d_{T'}(b) = d_T(b) - 2$, $d_{T'}(c) = d_T(c) - 2$, а степении остальных вершин в $T$ и $T'$ одинаковы).

• По индукционному предположению триангуляция $T'$ имеет правильную раскраску $\rho$ в 3 цвета.

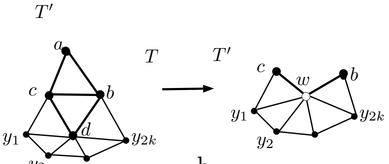
• НУО $\rho(w) = 1$ и $\rho(b) = 2$. Перенесем цвета вершин в $T$ и положим $\rho(a) = \rho(d) = 1$.

• Остается лишь проверить, что $\rho(c) \neq \rho(b)$.

• Так как $d_T(d)$ четно, от $db$ до $dc$ из $d$ выходит четное число ребер — скажем, $dy_1, \dots, dy_{2k}$ против часовой стрелки. Эти же ребра выходят в $T'$ из вершины $ad$ против часовой стрелки между $wb$ и $wc$.

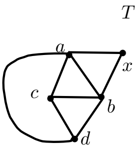



a

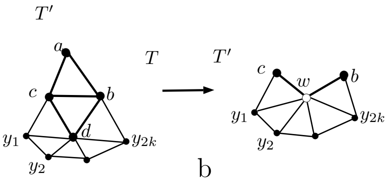



b

- Тогда в последовательности вершин $b, y_1, \dots, y_{2k}, c$ каждые две соседние смежны в $T'$, и все они имеют в $\rho$ цвет, отличный от $\rho(w) = 1$.
- Значит, в этой последовательности чередуются цвета 2 и 3, тогда $\rho(c) = 3$, что нам и нужно. □




a




b