

Теория графов. Глава 6. Планарные графы.

Д. В. Карпов

2024-2025

Определение

Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались во внутренних точках. Вершины изображаются точками, а рёбра — ломаными. Внутренние точки любой ломаной, изображающей ребро графа, не должны быть вершинами графа.

Определение

Плоским графом (или *плоским изображением*) мы будем называть конкретное изображение планарного графа на плоскости без пересечений и самопересечений рёбер.

- Таким образом, планарному графу могут соответствовать разные плоские графы.

Грань плоского графа

- Изображение плоского графа делит плоскость на части — *грани*. Это ключевой объект для плоского графа, отличающий его от абстрактного планарного графа. Ниже мы дадим формальное определение граней.
- На плоскости изображен плоский граф G . Пусть M — множество всех точек плоскости, не входящих в изображение G .
- Пусть запись $A \sim B$ означает, что точки $A, B \in M$ можно соединить ломаной, не пересекающей изображение графа G . Укажем три важных свойства \sim .

Утверждение

\sim — отношение эквивалентности.

Доказательство. • **Рефлексивность.** $A \sim A$

• **Симметричность.** Если $A \sim B$, то $B \sim A$.

• **Транзитивность.** Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$. □

Определение

Грани плоского графа G — классы эквивалентности по отношению \sim .

- Таким образом, все точки плоскости, не лежащие на изображении графа G , разбиты на грани.
- Множество всех граней графа G обозначается через $F(G)$, а их количество — через $f(G)$.
- Две точки из одной грани графа G могут быть соединены ломаной, не пересекающей изображение G .
- Любая ломаная, соединяющая две точки из разных граней, пересекает изображение G .

Теорема Жордана для замкнутой ломаной

Теорема 1

(С. Jordan, 1887.) Замкнутая несамопересекающаяся ломаная P делит точки плоскости, не лежащие на P , на две такие части, что выполнены следующие условия:

- (1) любые две точки из одной части можно соединить ломаной, не пересекающей P ;
- (2) любая ломаная, соединяющая две точки из разных частей, пересекает P .

Доказательство. • Пусть $P_1 \dots P_m$ — вершины P в порядке обхода по часовой стрелке. Обозначим через M множество всех точек плоскости, не лежащих на P .

- Зафиксируем на плоскости вектор ℓ , не параллельный ни одной из сторон P . Из каждой точки $A \in M$ выпустим луч $\ell(A)$ в направлении ℓ .
- В случае, если $\ell(A)$ содержит вершину P_i многоугольника P , но стороны $P_{i-1}P_i$ и P_iP_{i+1} лежат в одной полуплоскости относительно содержащей $\ell(A)$ прямой, мы будем говорить, что многоугольник P в вершине P_i *касается* $\ell(A)$.

- Посчитаем число $p(A)$ точек пересечения $\ell(A)$ с P , не являющихся касаниями. Очевидно, что $p(A)$ конечно.
- Часть M_0 будет состоять из всех точек $A \in M$, для которых $p(A)$ четно, а часть M_1 будет состоять из всех точек $B \in M$, для которых $p(B)$ нечетно.

Утверждение

M_0 и M_1 непусты.

Доказательство. • Рассмотрим прямую ℓ_0 , параллельную вектору ℓ , и проходящую через внутреннюю точку ломаной P (то есть точку, не являющуюся ее вершиной).

- При движении по ℓ_0 в направлении вектора ℓ отметим последнее пересечение с ℓ во внутренней точке — пусть это точка X .
- Рассмотрим содержащий X малый отрезок $[Y, Z]$ на этом ℓ_0 , не пересекающий P в отличных от X точках, пусть Y лежит перед X при движении в направлении ℓ .
- Тогда $p(Y) = 1$ (единственное пересечение в точке X), а $p(Z) = 0$.

Утверждение

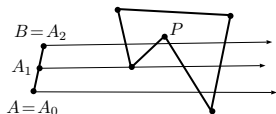
Пусть $A, B \in M$ и отрезок $[A, B]$ не пересекает P . Тогда $p(A)$ и $p(B)$ имеют одинаковую четность. В частности, выполнено условие (2).

Доказательство. • Если $AB \parallel \ell$, то утверждение очевидно.

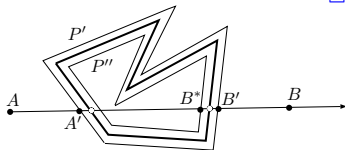
• Если нет, то отметим на отрезке AB все такие точки A_1, \dots, A_k в направлении от A к B , что $\ell(A_i)$ касается P (если они есть). Положим $A_0 = A$ и $A_{k+1} = B$.

• Тогда для каждого $i \in [0..k]$, все точки отрезка $[A_i, A_{i+1}]$ имеют, очевидно, одинаковое значение функции p , а при переходе на соседний отрезок функция p может иметь четный скачок (каждое касание $\ell(A_i)$ многоугольника P добавляет точкам с одной стороны от A_i двойку к количеству пересечений, см. рис. а).

• В любом случае, на всем отрезке $[A, B]$ функция p имеет одинаковую четность. □



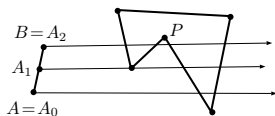
а



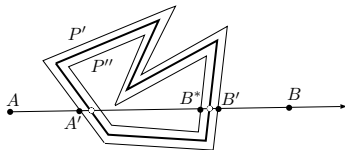
б

Докажем (1).

- Пусть $A, B \in M_i$. Если отрезок $[A, B]$ не пересекает P , то все понятно. Пусть пересекает, причем A_1 и B_1 — ближайшие к A и B соответственно точки пересечения.



a

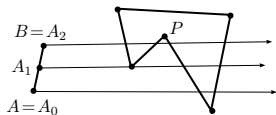


b

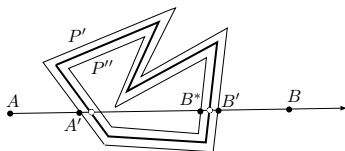
- Отметим на отрезке $[A, A_1]$ точку A' очень близко к A_1 , а на отрезке $[B_1, B]$ — точку B' очень близко к B_1 , пусть $|A_1 A'| = |B_1 B'| = \delta$ (см. рис. b). Тогда $\rho(A) = \rho(A')$ и $\rho(B) = \rho(B')$.

- Проведем вдоль каждой стороны многоугольника P две параллельных прямых на расстоянии δ с разных сторон, выбрав это число столь малым, чтобы в результате получились два “очень близких” к P многоугольника P' и P'' так, чтобы стороны P' и P'' не пересекали сторон P . (Достаточно выбрать δ меньше, чем минимальное расстояние от стороны P до вершины, на ней не лежащей.)

- НУО A' лежит на P' . Если и B' лежит на P' , то мы построили от A' до B' ломаную, не пересекающую P , тогда такая ломаная построена и от A до B .



a



b

- Пусть B' лежит на P'' , тогда обозначим через B^* точку пересечения P' с прямой AB , лежащую около B_1 (разумеется, на расстоянии δ).
- Несложно понять, что $p(B^*) - p(B') = \pm 1$ (разница состоит в том, что ровно для одной из этих точек учитывается пересечение около точки B_1).
- Однако применив доказанное выше утверждение, получим $p(B^*) \equiv p(A') \equiv p(A) \equiv p(B) \equiv p(B') \pmod{2}$, противоречие. □

Плоскость и сфера

- Плоскость и сфера переводятся друг в друга *стереографической проекцией*.
- Поставим сферу на плоскость, точку касания назовём южным полюсом, противоположную точку — северным полюсом N . Каждая точка $A \neq N$ сферы перейдёт в точку пересечения плоскости и луча NA .

Утверждение

Граф является планарным тогда и только тогда, когда его можно изобразить на сфере без пересечения рёбер во внутренних точках.

Доказательство. • Переводя изображение графа со сферы на плоскость нужно лишь выбрать северный полюс так, чтобы он не совпадал ни с одной из вершин графа и не попадал на рёбра. □

- Плоское изображение планарного графа ограничено (его можно поместить в большой круг).
- Поэтому в плоском изображении планарного графа есть ровно одна неограниченная *внешняя грань*, которая визуально сильно отличается от всех остальных, а в сферическом изображении такой грани нет.
- Грань сферического изображения графа, содержащая северный полюс будет соответствовать при стереографической проекции внешней грани плоского изображения.
- Таким образом, перемещая северный полюс на разные грани, можно любую грань сферического изображения сделать внешней гранью в плоском изображении графа. Это лишний раз подчеркивает, что на самом деле внешняя грань не отличается от остальных.

Граница грани

• Рассмотрим ребро e плоского графа G . Либо по разные стороны от e расположены разные грани (тогда ребро e — *граничное* ребро этих двух граней), либо по обе стороны от e — одна и та же грань, тогда назовем ребро e *внутренним* ребром этой грани. Обозначим через E_d множество всех граничных и внутренних рёбер грани d .

• *Граничные вершины* грани d — это концы рёбер из E_d . Обозначим множество граничных вершин грани d через V_d .

• Граничные и внутренние рёбра грани d — это в точности те рёбра, до которых от внутренней точки грани d можно прийти по ломаной, не пересекая изображение графа.

• Граничные вершины грани d — это в точности те вершины, до которых можно прийти по ломаной от внутренних точек этой грани, не пересекая её граничных и внутренних рёбер.

• *Граница* грани d — это подграф $B(d)$ графа G с множеством вершин V_d и множеством рёбер E_d .

• *Размер границы* грани d мы определим, как количество граничных рёбер этой грани плюс удвоенное количество внутренних рёбер. Обозначать эту величину будем через $b(d)$.

Свойство 1

Если сложить размеры границ всех граней, получится удвоенное количество рёбер.

Доказательство. Внутреннее ребро грани два раза считается в размере границы этой грани. Граничное ребро двух граней по разу считается в их размерах. □

Свойство 2

Любые две точки на границе грани d можно соединить ломаной, проходящей в d .

Доказательство. Пусть A — внутренняя точка грани d . От нее можно провести ломаные, не пересекающие изображение G до любых двух граничных. Все точки на этих ломаных лежат в d . □

Свойство 3

Если две точки A и B на изображении графа G можно соединить ломаной L , не пересекающей изображения G , то A и B лежат на границе некоторой грани.

Доказательство. A и B лежат на границе грани d , содержащей все внутренние точки L (см. рисунок а). □

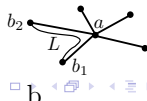
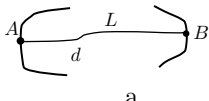
Определение

Рассмотрим любую вершину a плоского графа G и упорядочим выходы ребер из a по часовой стрелке. Два ребра, выходы которых — соседние в этом порядке, будем называть *соседними в вершине a* .

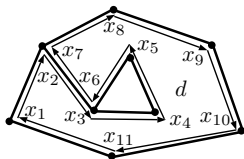
Свойство 4

Пусть ab_1 и ab_2 — два соседних ребра в вершине a . Тогда рёбра ab_1 и ab_2 лежат в границе некоторой грани.

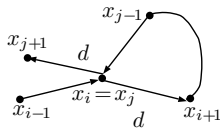
Доказательство. вершины b_1 и b_2 можно соединить ломаной вдоль b_1ab_2 , не пересекающей изображения G (см. рисунок б). Поэтому, рёбра ab_1 и ab_2 лежат в границе некоторой грани. □



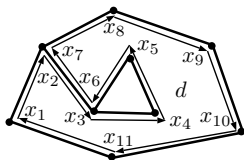
- Пусть G — плоский граф, $d \in F(G)$, а $x_1x_2 \in E_d$.
- Пройдем по ребру x_1x_2 от x_1 к x_2 . НУО справа по ходу движения расположена грань d . Повернем в вершине x_2 направо до выхода соседнего ребра x_2x_3 . (Если $d_G(x_2) = 1$, то $x_3 = x_1$, это нам не мешает.) Очевидно, $x_2x_3 \in E_d$. Пойдем по этому ребру от x_2 к x_3 , справа опять будет расположена грань d . И так далее. В конечном итоге мы вернемся на ребро x_1x_2 (в вершину x_1 мы можем вернуться и раньше!). Получился замкнутый циклический маршрут (см. рис. а).



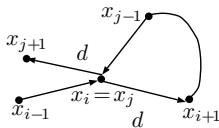
а



б

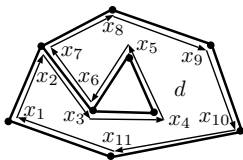


a

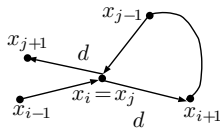


b

- Пусть получился циклический маршрут $Z = x_1x_2 \dots x_k$. Рассмотрим вершину x_i . по построению, Z обходит вокруг x_i — скажем, против часовой стрелки. Пусть мы вышли из вершины x_i по ребру x_ix_{i+1} , а следующий раз вернулись в эту вершину по ребру $x_{j-1}x_j$ (в этом случае $x_i = x_j$, см. рис. b).
- Тогда сектор между выходами рёбер x_ix_{i+1} и x_jx_{j-1} из вершины $x_i = x_j$ не принадлежит грани d . Следовательно, Z проходит все рёбра из E_d , инцидентные вершине x_i . Поскольку это верно для любой вершины Z , этот маршрут обходит все рёбра одной из компонент графа $B(d)$.
- Обозначим через $Z(U)$ такой маршрут для компоненты U , а через $Z(d)$ — объединение построенных маршрутов для всех компонент $B(d)$.



a



b

- Если маршрут $Z(d)$ проходит ребро e дважды, то, очевидно, в разных направлениях. Значит, по обе стороны от e расположена грань d , то есть e — внутреннее ребро d .
- Пусть e — внутреннее ребро грани d (см. ребро $x_2x_3 = x_6x_7$ на рисунке). Тогда при проходе по e в любом из направлений справа будет расположена грань d . Поэтому, маршрут $Z(d)$ дважды пройдет e — в обоих направлениях.

Лемма 1

Для плоского графа G выполнены следующие утверждения.

- 1) Если $d \in F(G)$ и $B(d)$ несвязна, то разные компоненты связности графа $B(d)$ лежат в разных компонентах связности графа G .
- 2) Граф G несвязен, если и только если он имеет грань с несвязной границей.

Доказательство. 1) • Пусть B_1 и B_2 — две компоненты $B(d)$. Изображение компоненты B_1 ограничено и не пересекает других компонент $B(d)$. Следовательно, изображение B_1 можно отделить от изображения B_2 замкнутой ломаной в грани d , не пересекающей ребер G (такую ломаную можно построить, почти повторив маршрут $Z(B_1)$: вместо каждого прохода по ребру, проведем его копию на малом расстоянии δ в грани d , как в доказательстве теоремы Жордана).

• Значит, между B_1 и B_2 нет пути в графе G .

2) Очевидно, можно обойти все грани графа G , каждый раз переходя в грань имеющую с предыдущей общую сторону или вершину (достаточно отметить по внутренней точке на каждой грани и проложить на плоскости маршрут, все эти точки обходящий).

- Тогда, если граница каждой грани связна, то связно и их объединение, а это граф G , противоречие. Значит, несвязный граф имеет грань с несвязной границей.
- Если G имеет грань с несвязной границей, то G несвязен по пункту 1. □

Лемма 3

Пусть d — грань реберно двусвязного графа G . Тогда $B(d)$ — цикл (не обязательно простой).

Доказательство. • Так как G связан, $B(d)$ — связный граф по Лемме 1. Значит, и $Z(d)$ связан. Так как внутренних рёбер у d нет (граф не имеет мостов), $Z(d)$ — цикл. \square

• Докажем, что граница грани почти всегда однозначно задает эту грань.

Лемма 4

Если две разные грани f и f' плоского графа G имеют одинаковые границы, то G — простой цикл.

Доказательство. • Пусть B — общая граница этих граней, $e \in E(B)$. По Лемме 2 тогда e — не мост графа G , а значит, существует простой цикл Z , содержащий e .

• Тогда Z делит плоскость на две области — $O \supset f$ и $O' \supset f'$.

• Пусть $e' \in B \setminus Z$. Тогда e' лежит внутри одной из областей O и O' — скажем, в O' . В этом случае, e' не может быть граничным ребром грани $f \subset O$, противоречие.

• Следовательно, $B \subset Z$.

- Докажем, что $G = Z$, тогда G — простой цикл.
- Если $f = O$ и $f' = O'$, то $G = Z$, что нам и нужно.
- Пусть, скажем, $f \neq O$.
- Так как каждая грань целиком лежит в одной из областей, O разбивается на грани.
- Значит, существует еще одна грань $f^* \subset O$.
- Пусть $X \in f$ и $X^* \in f^*$.
- Так как точки X и X^* лежат в области O , их можно соединить ломаной L , проходящей в O .
- Пойдем по ломаной L от точки X . В некоторый момент мы перейдем из f в другую грань. Значит, мы пересечем изображение графа G — скажем, ребро e .
- Тогда e — граничное ребро грани f . Но при этом e изображено внутри O (там проходит ломаная L), следовательно, $e \notin E(Z)$. Противоречие с доказанным выше.

□

Лемма 5

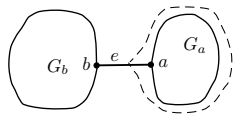
Пусть G — плоский граф.

1) Если грань d и ее граничная вершина a таковы, что B_1 и B_2 — разные компоненты графа $B(d) - a$, то B_1 и B_2 лежат в разных компонентах графа $G - a$. В частности, a — точка сочленения графа G .

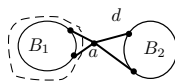
2) Граф G без петель вершинно двусвязен, если и только если границы его граней — простые циклы.

Доказательство. 1) Аналогично доказательству Леммы 1, плоское изображение B_1 можно отделить от изображения B_2 ломаной, не пересекающей ребер $G - a$ (см. рис. b), а значит, между B_1 и B_2 нет рёбер в графе $G - a$.

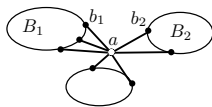
• Следовательно, a — точка сочленения графа G .



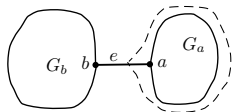
a



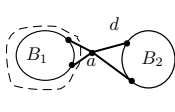
b



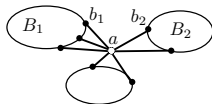
c



a



b



c

2) • Пусть a — точка сочленения графа G . Рассмотрим плоское изображение несвязного графа $G - a$, полученное из G удалением вершины a .

- В силу Леммы 1 граф $G - a$ имеет несвязную грань d , а граф G не имеет. Значит, a лежит на грани d и смежна со всеми компонентами ее границы.
- Упорядочим выходы ребер из a по часовой стрелке. Тогда есть два соседних ребра, выходящих к разным компонентам графа $B(d)$ — скажем, ребро ab_1 к компоненте B_1 и ребро ab_2 к компоненте B_2 (см. рис. c).
- Точка сочленения a отделяет b_1 от b_2 в графе G . Существует грань f графа G , граница которой содержит a , b_1 и b_2 . Тогда a — точка сочленения $B(f)$.
- Наоборот, если грань d такова, что $B(d)$ имеет точку сочленения, то по пункту 1 граф G также имеет точку сочленения.

Грани трёхсвязного графа

Определение

- Цикл C графа G — *неразделяющий*, если граф $G - V(C)$ связан.
- Цикл C — *индуцированный*, если он не имеет хорд (то есть, является индуцированным подграфом на своем множестве вершин).

Лемма 6

Пусть G — трёхсвязный плоский граф. Тогда множество границ его граней есть в точности множество его неразделяющих индуцированных циклов.

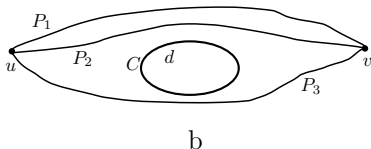
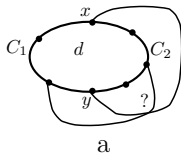
Доказательство. \supset . Пусть C — неразделяющий индуцированный цикл в G . Тогда в одной из областей, на которые C делит плоскость — назовём ее d — нет вершин графа G . Так как индуцированный цикл C не имеет диагоналей, внутри d рёбер тоже нет. Значит d — грань, а цикл C — её граница.

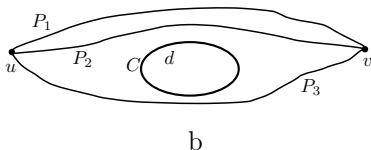
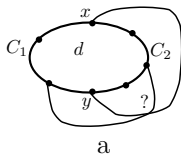
С. • Пусть C — граница грани d графа G . Тогда C — простой цикл.

• Предположим, что C имеет диагональ xu . Вершины x и u делят цикл C на две дуги C_1 и C_2 .

• Граф $G - x - u$ должен быть связан ввиду трёхсвязности графа G . Значит, в $G - x - u$ есть C_1C_2 -путь P .

• Понятно, что и диагональ xu , и путь P должны проходить вне грани d , но тогда они пересекаются (см. рис. а), что невозможно.





- Докажем, что граф $G - V(C)$ связан.
- Пусть $u, v \in V(G) \setminus V(C)$. По теореме Уитни в трёхсвязном графе G существуют три независимых uv -пути P_1, P_2 и P_3 , которые делят плоскость на три области.
- Грань d лежит в одной из этих областей, пусть это область, граница которой образована путями P_2 и P_3 (см. рис. b). Тогда P_1 не пересекается с границей грани d — циклом C — а значит, вершины u и v связаны в $G - V(C)$.
- Таким образом, граница грани графа G является индуцированным неразделяющим циклом. □

Разные изображения одного графа. Изоморфизм

- Слева и справа на рисунке — плоские изображения одного и того же графа. Но это разные изображения! У правого изображения есть грань, в границе которой 6 вершин, а у левого — нет.



Определение

Пусть G и G' — два плоских графа, а биекция $\varphi : V(G) \rightarrow V(G')$ удовлетворяет следующим условиям.

$$(1) \quad xy \in E(G) \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E(G');$$

(2) $U \subset V(G)$ является множеством граничных вершин некоторой грани графа G , если и только если $\varphi(U) = \{\varphi(x) : x \in U\}$ является множеством граничных вершин некоторой грани графа G' .

Тогда φ — *изоморфизм плоских графов* G и G' , а сами эти плоские графы *изоморфны*.

Теорема 2

(Н. Whitney, 1933.) Любые два плоских изображения трёхсвязного планарного графа G изоморфны как плоские графы.

Доказательство. • Пусть G_1 и G_2 плоские изображения G , причем $x_1 \in V(G_1)$ и $x_2 \in V(G_2)$ — изображения вершины $x \in V(G)$.

• Определим отображение $\varphi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ так: $\varphi(x_1) = x_2$ для любой вершины $x_1 \in V(G_1)$. Очевидно, $x_1 y_1 \in E(G_1) \iff x y \in E(G) \iff \varphi(x_1) \varphi(y_1) = x_2 y_2 \in E(G_2)$.

• По Лемме 6 границы граней плоского графа G_1 — это в точности неразделяющие индуцированные циклы графа G_1 , а границы граней плоского графа G_2 — это в точности неразделяющие индуцированные циклы G_2 . Это свойство не имеет отношения к плоскому изображению.

• $U_1 \subset V(G_1)$ — множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в G_1 (то есть, границы грани G_1)
 $\iff U \subset V(G)$ множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в G $\iff \varphi(U_1) = U_2 \subset V(G_2)$ — множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в G_2 (то есть, границы грани G_2).

• Следовательно, φ — изоморфизм плоских графов.

Формула Эйлера

- В разных плоских изображениях планарного графа G могут получаться разные грани. Однако их количество является инвариантом графа, как говорит нам формула Эйлера.

Теорема 3

(L. Euler, 1752.) Пусть G — плоский граф с v вершинами, e рёбрами и f гранями, имеющий k компонент связности. Тогда $v - e + f = 1 + k$.

Доказательство. Индукцией по количеству рёбер.

База для случая, когда граф G — лес, очевидна: в этом случае $f = 1$, $e = v - k$.

Переход • Пусть для меньших графов формула Эйлера уже доказана и G — не лес.

- Тогда в графе есть цикл, пусть ребро ℓ входит в цикл. Так как ℓ — не мост, по ребру ℓ граничат две разные грани, которые объединяются в одну в графе $G - \ell$.
- Таким образом, в графе $G - \ell$ v вершин, k компонент, $e - 1$ ребро и $f - 1$ грань. Теперь формула Эйлера для G следует из формулы Эйлера для $G - \ell$, которая верна по индукционному предположению.

- Мы будем обозначать количество вершин, рёбер и граней плоского графа G буквами v , e и f соответственно.

Следствие 1

Пусть G — планарный граф без петель и кратных рёбер, $v \geq 3$. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) $e \leq 3v - 6$.
- 2) Если граф G — двудольный, то $e \leq 2v - 4$.

Доказательство. 1) • Докажем, что размер границы каждой грани графа G не менее 3. В самом деле, пусть $d \in F(G)$, $b(d) \leq 2$.

- Так как петель и кратных рёбер нет, $B(d)$ не имеет циклов. Следовательно, все рёбра внутренние. Тогда такое ребро всего одно, а значит, $e = 1$ и утверждение очевидно.
- Сумма размеров границ всех граней равна $2e$, а размер каждой границы не менее 3. Следовательно, $2e \geq 3f$ или $f \leq \frac{2e}{3}$.
- Тогда из формулы Эйлера $v - \frac{e}{3} = v - e + \frac{2e}{3} \geq v - e + f \geq 2$, откуда следует доказываемое неравенство.

2) • Докажем, что размер границы каждой грани двудольного графа G не менее 4.

• В самом деле, пусть $d \in F(G)$, $b(d) \leq 3$. Поскольку в двудольном графе нет циклов длины 3, и в G нет кратных рёбер, все рёбра внутренние. Тогда такое ребро всего одно, а значит, $e = 1$ и утверждение очевидно.

• Сумма размеров границ всех граней равна $2e$, а размер каждой границы не менее 4. Следовательно, $f \leq \frac{e}{2}$.

• Тогда из формулы Эйлера

$v - \frac{e}{2} = v - e + \frac{e}{2} \geq v - e + f \geq 2$, откуда следует доказываемое неравенство. □

Следствие 2

Пусть G — планарный граф без петель и кратных рёбер. Тогда $\delta(G) \leq 5$.

Доказательство. • В случае $v \leq 2$ утверждение очевидно.

• Пусть $v \geq 3$ и при этом $\delta(G) \geq 6$. Тогда $6v \leq 2e$, то есть, $e \geq 3v$ — противоречие со Следствием 1. □

Следствие 3

K_5 и $K_{3,3}$ — непланарные графы.

Доказательство. 1) Пусть K_5 планарен. Для этого графа $v = 5$, $e = 10$. По пункту 1 следствия 1 мы имеем $10 = e \leq 3v - 6 = 9$, что неверно.

2) Пусть $K_{3,3}$ планарен. Для этого двудольного графа $v = 6$, $e = 9$. По пункту 2 следствия 1 мы имеем $9 = e \leq 2v - 4 = 8$, что неверно. □

Определение

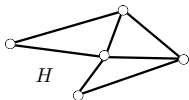
- Граф H' называется *подразбиением* графа H , если H' может быть получен из H заменой некоторых рёбер на простые пути (каждое заменяемое ребро xy меняется на простой xy -путь). При этом, все добавляемые вершины различны и имеют степень 2.
- Вершины H в графе H' называются *главными*.
- $G \supset H$ означает, что граф G имеет подграф, изоморфный подразбиению графа H .

Следствие 4

- 1) Подразбиение графа H планарно, если и только если H планарен.
- 2) Любое подразбиение графа K_5 или $K_{3,3}$ непланарно.

Доказательство. 1) Изображение как ребра, так и простого пути — ломаная.

- 2) Следует из пункта 1 и Следствия 3. □



Лемма 7

Пусть $x, y \in V(G)$, $xy \in E(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Если $G \cdot xy \supset K_{3,3}$, то $G \supset K_{3,3}$.
- 2) Если $G \cdot xy \supset K_5$, то $G \supset K_5$ или $G \supset K_{3,3}$.

Доказательство. • Пусть $w = x \cdot y$, а H — подграф $G \cdot xy$, являющийся подразбиением $K_{3,3}$ или K_5 .

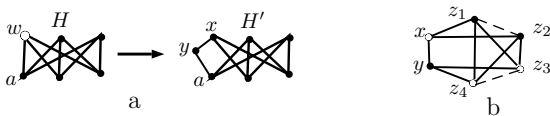
• Если $w \notin V(H)$ то, очевидно, $G \supset K_{3,3}$ или $G \supset K_5$, соответственно.

• Далее $w \in V(H)$. Построим подграф H' графа G следующим образом: $V(H') = V(H) \setminus \{w\} \cup \{x, y\}$. Все рёбра из $E(H)$, не инцидентные w , включим в $E(H')$. Для каждого ребра $aw \in E(H)$ включим его в $E(H')$ то из рёбер ax или ay , которое есть в графе G (если есть оба этих ребра, возьмем любое из них). Наконец, поместим в $E(H')$ ребро xy .

• Рёбра графа $H' - xy$, инцидентные вершине x , назовем **красными**, а рёбра графа $H' - xy$, инцидентные вершине y — **синими**. Вместе красных и синих рёбер ровно $d_H(w)$.

• Если в графе H' нет синих рёбер, то $H' - y$ — подграф графа G , изоморфный H . Аналогично для красных рёбер. В этом случае доказательство леммы закончено.

- Пусть aw — единственное синее ребро в H' . Тогда ребру $aw \in E(H)$ соответствует путь aux в графе H' , то есть, H' является подразбиением графа H (см. рис. а). В этом случае лемма доказана, аналогично для случая, когда есть ровно одно красное ребро.



- Пусть теперь и красных, и синих рёбер не менее, чем по два. Тогда $d_H(w) \geq 4$, откуда сразу же следует, что $H \supset K_5$, $d_H(w) = 4$.
- Пусть тогда z_1, z_2, z_3, z_4 — четыре оставшиеся главные вершины графа H . Каждая пара из вершин w, z_1, z_2, z_3, z_4 соединена в H путём — подразбиением соответствующего ребра графа K_5 . Разные пути не имеют общих внутренних вершин. Этим путям соответствуют пути в графе H' .
- НУО в H' есть xz_1 -путь, xz_2 -путь, yz_3 -путь и yz_4 -путь (см. рис. б). Тогда $H' \supset K_{3,3}$: каждая из вершин x, z_3, z_4 соединена путём с каждой из вершин y, z_1, z_2 , разные пути не имеют общих внутренних вершин.



Теорема 4

(К. Kuratowski, 1930) *Граф G (возможно, имеющий кратные рёбра и петли) непланарен, если и только если G имеет подграф, являющийся подразбиением K_5 или $K_{3,3}$.*

Доказательство. \Leftarrow . Следствие 4.

\Rightarrow . • Предположим противное и рассмотрим минимальный контрпример G (непланарный граф, не содержащий подразбиений K_5 и $K_{3,3}$).

• Любой не содержащий подразбиений K_5 и $K_{3,3}$ граф с меньшим чем G числом вершин или с таким же, как у G числом вершин и меньшим числом рёбер обязательно является планарным.

Утверждение 1

G не имеет петель и кратных рёбер.

Доказательство. • Пусть e — петля графа G . Тогда граф $G - e$ планарен и из его планарности следует планарность графа G (можно дорисовать петлю к плоскому изображению $G - e$).

• Теперь пусть G имеет два кратных ребра e и f . Тогда граф $G - e$ планарен и из его планарности следует планарность графа G (можно дорисовать ребро e вдоль ребра f в плоском изображении $G - e$).

Утверждение 2

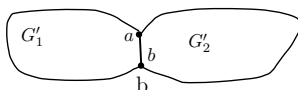
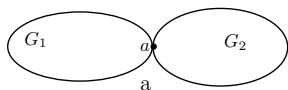
G трехсвязен.

Доказательство. • Если G несвязен, то его компоненты не содержат подразбиений K_5 и $K_{3,3}$, а значит, планарны. Тогда планарен и граф G , противоречие.

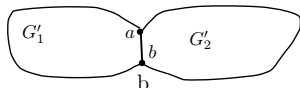
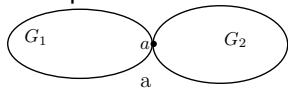
• Пусть G имеет точку сочленения a . Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\}$.

• Графы G_1 и G_2 не содержат подразбиений K_5 и $K_{3,3}$, а значит, планарны.

• Тогда планарен и граф G (можно изобразить G_1 и G_2 так, чтобы a оказалась на границе внешней грани обоих изображений и склеить их, см. рисунок а). Противоречие.

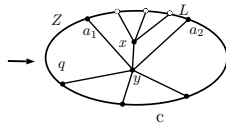
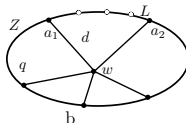
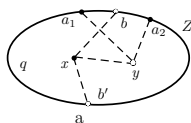


- Наконец, пусть G двусвязен, но имеет разделяющее множество $S = \{a, b\}$. Тогда $G = G_1 \cup G_2$, где $V(G_1) \cap V(G_2) = S$. Пусть $G'_i = G_i + ab$.
 - Предположим, что G'_1 содержит подграф H — подразбиение графа K_5 или $K_{3,3}$. Так как H не может быть подграфом G , $ab \in E(H) \setminus E(G)$.
 - Однако, G содержит ab -путь P по вершинам G_2 . Заменяя в H ребро ab на путь P , мы получим подразбиение H' графа H , являющееся подграфом G . Тогда G содержит подразбиение K_5 или $K_{3,3}$, что не так.
 - Таким образом, G'_1 не содержит подразбиений K_5 и $K_{3,3}$, а значит, G'_1 планарен. Аналогично, G'_2 планарен.
 - Тогда можно изобразить эти графы на плоскости так, чтобы ребро ab в обоих изображениях лежало в границах внешних граней и склеить эти изображения (см. рис. б).
- Противоречие. □



- Вернемся к доказательству теоремы.
- Очевидно, $G \neq K_4$. По Теореме 4.9 существует такое ребро $w \in E(G)$, что граф $G \cdot w$ трёхсвязен, пусть $w = x \cdot y$.
- По Лемме 7 мы имеем $G \cdot w \not\cong K_5$, $G \cdot w \not\cong K_{3,3}$, следовательно, граф $G \cdot w$ планарен.
- Пусть $G' = G \cdot w - w \cong G - x - y$ (изоморфность этих двух графов очевидна).
- Рассмотрим плоское изображение графа G' , получающееся из изображения $G \cdot w$ удалением вершины w , пусть q — грань G' , на которой расположена вершина w .
- Граф G' двусвязен, поэтому граница грани q — это простой цикл Z .
- Отметим на Z вершины, смежные с y (обозначим их множество через A) и пронумеруем их в циклическом порядке: a_1, a_2, \dots, a_n . Из трёхсвязности G следует, что $n \geq 2$. Пусть B — множество вершин цикла Z , смежных с x .
- Если $A = B$ то $n \geq 3$ (так как граф $G - A$ в этом случае несвязен), тогда G содержит подразбиение K_5 с главными вершинами x, y, a_1, a_2, a_3 , противоречие.
- Далее НУО $B \not\subset A$ пусть вершина $b \in B \setminus A$ лежит на дуге $L = a_1 z a_2$, не содержащей других вершин из A .

- Предположим, что вершина $b' \in B$ не лежит на L (возможно, b' совпадает с одной из вершин множества A , но $b' \notin \{a_1, a_2\}$).
- Тогда циклический порядок вершин a_1, b, a_2, b' на Z именно такой, а значит, G содержит подразбиение $K_{3,3}$ с главными вершинами x, a_1, a_2 (одна доля) и y, b, b' (вторая доля), противоречие (см. рис. а).



- Остается случай, когда все вершины множества B лежат на дуге L (возможно, совпадают с a_1 или a_2).
- В этом случае рассмотрим исходное плоское изображение графа $G \cdot xy$ и удалим с него все ребра от w до вершин из $B \setminus A$ (см. рис. b).
- Ребра от A до w делят грань q на n граней, одна из них — грань d , ограниченная L и ребрами wa_1, wa_2 .
- Мы можем изобразить внутри d вершину x и соединить ее ребрами с w и вершинами из B , не нарушая планарности (см. рис. c). Для построения плоского изображения G остается только переименовать w в y .

Триангуляции

Определение

- 1) Будем называть грань *треугольником*, если ее граница — это треугольник.
 - 2) Плоский граф называется *триангуляцией*, если каждая его грань — треугольник. Кратные рёбра и петли запрещены.
 - 3) *Триангулировать* плоский граф значит провести в нём дополнительные рёбра так, чтобы получилась триангуляция.
- По Лемме 5 триангуляция — двусвязный граф.

Лемма 8

Пусть G — плоский граф без петель, $v(G) \geq 3$, никакие два кратных ребра не образуют грань. Тогда G можно триангулировать без появления новых пар кратных ребер.

Доказательство. • Пусть G — не триангуляция. Тогда G имеет грань d , не являющуюся треугольником. Пусть $H = G(V_d)$.

- По Лемме 1 любые две вершины из V_d можно соединить ломаной в d , эта ломаная не будет пересекать ребер графа G .
- Значит, если граф H неполный, то мы можем добавить в него ребро без образования новых пар кратных ребер.

Лемма 9

В любой триангуляции T с $v(T) \geq 4$ есть ребро e , входящее ровно в два треугольника — в две грани, граничащие по e .

Доказательство. • Любое ребро $f \in E(T)$ входит в две грани, и эти грани граничат только по f (иначе в T есть пара кратных рёбер). Значит, нам достаточно найти ребро e , не входящее в *разделяющий* треугольник — такой, что в обеих частях плоскости относительно него есть вершины графа.

- Если в T нет разделяющего треугольника, то утверждение очевидно — нам подойдет любое ребро.
- Предположим, что разделяющие треугольники есть и рассмотрим такой разделяющий треугольник abc , что внутри него нет других разделяющих треугольников.
- Однако, внутри abc есть вершины, а значит, есть и ребро e . Тогда ребро e не может входит в разделяющий треугольник, так как такой треугольник содержался бы внутри abc , что противоречит выбору abc .

Изображение с прямыми рёбрами

Теорема 5

(К. Wagner, 1936.) Пусть G — планарный граф без кратных рёбер. Тогда существует плоское изображение G , в котором все рёбра — отрезки.

Доказательство. • Будем доказывать утверждение индукцией по количеству вершин графа, база для графа на одной вершине очевидна.

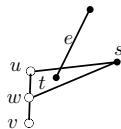
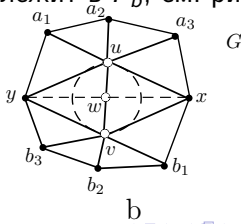
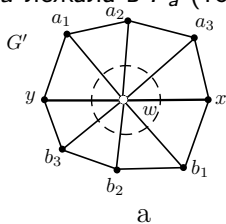
• Достаточно доказать теорему для случая, когда G — триангуляция, так как по Лемме 8 любой граф можно триангулировать без появления кратных рёбер. Будем доказывать, что можно выпрямить триангуляцию, тогда будет выпрямлен и исходный граф.

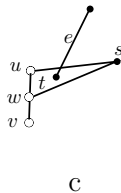
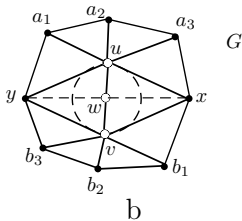
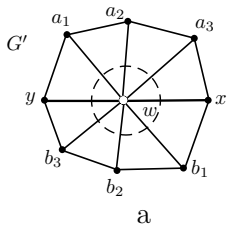
• По Лемме 9 выберем ребро $e = uv \in E(G)$ так, чтобы оно входило ровно в два треугольника — грани xiv и uiv .

• Тогда $G' = G \cdot uv$ — триангуляция с плоским изображением, в котором “сжаты” грани xiv и uiv , а остальные грани — такие же, как в G . Кратных рёбер в G' нет.

• По индукционному предположению, существует изображение G' с прямыми рёбрами. Далее рассматриваем его.

- Найдем минимум расстояний между вершинами в G' , а также минимум расстояний от вершин до не инцидентных им рёбер (напомним, что рёбра — это отрезки). Пусть d — наименьший из этих минимумов. Очевидно, $d > 0$.
- Проведем окружность S радиуса $\delta = \frac{d}{2}$ с центром w . Понятно, что внутри S вершин графа G' нет и пересекают эту окружность только рёбра с концом в w .
- Ломаная xw делит многоугольник $P = ya_1 \dots a_k x b_1 \dots b_m$ на два многоугольника: P_a , содержащий a_1, \dots, a_k и P_b , содержащий b_1, \dots, b_m .
- Проведем диаметр uv окружности S так, чтобы x и y лежали по разную сторону от соответствующей прямой и u лежала в P_a (тогда v лежит в P_b , см. рис. b).





• Удалим все рёбра, инцидентные w , из графа. Теперь проведем отрезки от u до x, y, a_1, \dots, a_k и от v до x, y, b_1, \dots, b_m (см. рис. b). Очевидно, никакие два проведенных отрезка не пересекают друг друга.

• Остается доказать, что проведенные отрезки не пересекают других рёбер графа G .

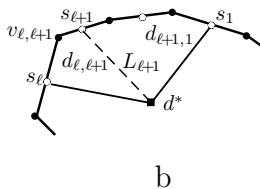
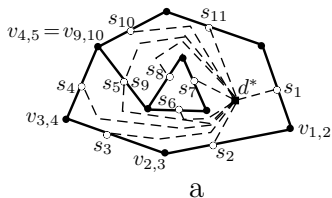
• Пусть, скажем, ребро us пересекает какое-то другое ребро e (см. рис. c). Стороны sw и wu треугольника swu не могут пересекать e . Следовательно, один из концов e — назовем его t — лежит в треугольнике swu . Но тогда t лежит в треугольнике swu и расстояние от t до отрезка sw , очевидно, меньше $|uw| = \frac{d}{2}$, противоречие.



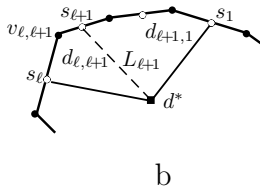
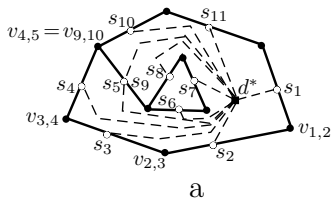
Лемма 10

Пусть G — связный плоский граф, $d \in F(G)$, Пусть $k = b(d)$, а $e_1 \dots e_k$ — рёбра из E_d в порядке циклического обхода $Z(d)$ (нумерация — циклическая по модулю k , внутренние рёбра грани d встречаются в этой нумерации дважды).

Отметим точку d^* на грани d и по точке s_i на каждом ребре e_i . Тогда в грани d можно провести ломаные L_1, \dots, L_k без общих внутренних точек, соединяющие d^* с s_1, \dots, s_k соответственно. При этом, циклический порядок выходов ломаных в точке d^* будет L_1, \dots, L_k (см. рис. а).



Доказательство. Рассмотрим отдельно от всего графа грань d и добавим вершины s_1, \dots, s_k, d^* .



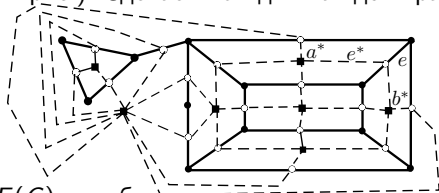
База для $\ell = 2$ очевидна — в грани d_0 можно провести ломаную L_2 , соединяющую граничные точки d^* и s_2 . В результате ломаная L_2L_1 разобьет d на две части $d_{1,2}$ и $d_{2,1}$, очевидно, обладающие нужными свойствами.

Переход $\ell \rightarrow \ell + 1$. Рассмотрим грань $d_{\ell,1}$. На ее границе лежат точки d^* и $s_{\ell+1}$, которые можно соединить в грани $d_{\ell,1}$ ломаной $L_{\ell+1}$ (см. рис. b). В результате грань $d_{\ell,1}$ будет разбита этой ломаной на две грани $d_{\ell,\ell+1}$ и $d_{\ell+1,1}$ с нужными свойствами. \square

Двойственный граф

- Пусть G — связный плоский граф. Вершины *двойственного графа* G^* будут соответствовать граням графа G : внутри каждой грани a графа G мы отметим соответствующую ей вершину a^* графа G^* . Будем говорить, что вершина a^* *двойственна* грани a .

- Зафиксируем на каждом ребре графа G по точке, которую назовём *серединой* этого ребра. Точку a^* можно соединить внутри грани a непересекающимися ломаными с серединами всех входящих в границу грани a рёбер, как описано в Лемме 10 (см. рис.). Сделаем так для каждой грани графа G .



- Пусть $e \in E(G)$ — ребро, по которому граничат две грани a и b графа G (возможно, $a = b$). Ему будет соответствовать ребро e^* двойственного графа G^* , соединяющее двойственные граням a и b вершины a^* и b^* и проходящее через середину ребра e . Назовём ребро e^* *двойственным* к e .

- Если грани a и b совпадают (или, что равносильно, ребро e — мост), то e^* — петля.
 - Вершины $a^*, b^* \in V(G^*)$ оказываются соединены таким количеством рёбер, сколько общих рёбер имеют границы граней a и b .
 - Таким образом, существует естественная биекция между рёбрами G и рёбрами G^* (каждому ребру графа G ставится в соответствие двойственное). Следовательно, $e(G) = e(G^*)$.
 - Граф G^* зависит не только от графа G , но и от изображения этого графа на плоскости, потому мы определяем G^* для плоского графа G . Для разных плоских изображений одного планарного графа могут получиться неизоморфные двойственные графы.
 - Двойственный граф не зависит ни от того, какие точки мы выберем внутри граней исходного графа G , ни от того, какие точки мы назовем серединами рёбер.
- Нетрудно доказать, что получатся изоморфные плоские графы.

• Итак, вершины графа G^* соответствуют граням графа G , а рёбра графа G^* соответствуют рёбрам графа G . Чему в G соответствуют грани G^* ?

Лемма 11

Пусть G — связный плоский граф. Тогда существует биекция между $V(G)$ и $F(G^)$, которая ставит в соответствии каждой вершине $a \in V(G)$ грань $a^* \in F(G^*)$, содержащую a .*

Доказательство. • Рассмотрим грань $a^* \in F(G^*)$ и докажем, что на ней изображена хотя бы одна вершина графа G .

• Рассмотрим ребро $e^* \in E_{a^*}$. По построению оно пересекает ребро e графа G . Следовательно, часть изображения ребра e лежит в грани a^* . По построению e пересекает ровно одно ребро графа G^* и ровно один раз, следовательно, хотя бы один конец e (a это вершина графа G) лежит в a^* .

• Нам известно, что $f(G) = v(G^*)$, $e(G) = e(G^*)$. По формуле Эйлера, $v(G) + f(G) - e(G) = 2 = v(G^*) + f(G^*) - e(G^*)$, откуда следует, что $f(G^*) = v(G)$.

• Значит, на каждой грани a^* плоского графа G^* лежит ровно одна вершина графа G , которую мы и обозначим через a . \square

В обозначениях Леммы 11 мы будем говорить, что вершина $a \in V(G)$ и грань $a^* \in F(G^*)$ **двойственны** друг другу.

Лемма 12

Пусть G — связный плоский граф. Тогда $(G^*)^* \simeq G$.

Доказательство. • Отметим на каждой грани $a^* \in F(G^*)$ двойственную ей вершину $a \in V(G)$ (это можно сделать по Лемме 11). На каждом ребре $e^* \in E(G^*)$ отметим в качестве середины как раз ту точку, что была использована при построении G^* .

- После этого от каждой вершин графа G проведем “половинки” инцидентных ей ребер из $E(G)$, как раз до их середин. В результате будут в точности проведены ребра графа G , как на исходном изображении. Получится граф G .
- Итак, на каждой грани $a^* \in F(G^*)$ отмечена ровно одна вершина, которая соединена с некоторыми серединами ребер из $E(G^*)$ непересекающимися ломаными так, что для каждого ребра $e^* \in E(G^*)$ проведено двойственное ребро $e \in E(G)$.
- Следовательно, от точки a на грани $a^* \in G^*$ проведены ломаные до всех середин ребер из $B(a^*)$, причем до граничных ребер — с одной, а до внутренних — с обеих сторон. Таким образом, построенный граф G — это двойственный граф $(G^*)^*$.
- Так как построение двойственного графа не зависит от выбора точек на гранях и серединах ребер, $(G^*)^* \simeq G$.

Раскраски карт

- **Карта** — связный плоский граф без мостов. Его грани иногда называют *странами*.
- Раскраска граней плоского графа G называется *правильной*, если две грани, имеющие общее ребро, покрашены в разные цвета.
- Для плоского графа G мы будем обозначать через $\chi^*(G)$ минимальное количество цветов, для которого существует правильная раскраска граней графа G .
- Нетрудно понять, что правильные раскраски граней плоского графа G взаимно однозначно соответствуют правильным раскраскам вершин двойственного графа G^* . Поэтому $\chi^*(G) = \chi(G^*)$ и $\chi(G) = \chi^*(G^*)$.
- **Гипотеза четырёх красок. (F. Guthrie, 1852.)**
Страны любой карты можно правильным образом покрасить в 4 цвета.
- 4CC эквивалентна следующему утверждению: $\chi(G) \leq 4$ для любого планарного графа G без петель.

Теорема о 5 красках

Теорема 6

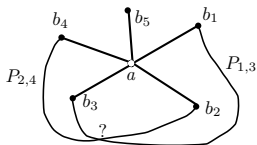
(Ф. Кетре, 1879.) Для любого планарного графа G без петель $\chi(G) \leq 5$.

Доказательство. • Индукция по $v(G)$, база для случая $v(G) \leq 5$ очевидна. По Следствию 2 граф G имеет вершину a степени не более 5.

• Граф $G - a$ также планарен и по индукционному предположению мы знаем, что $\chi(G - a) \leq 5$. Пусть ρ — правильная раскраска вершин $G - a$ в 5 цветов.

• Если вершины из $N_G(a)$ покрашены не более чем в 4 цвета, мы можем докрасить вершину a и получить правильную раскраску вершин G .

• Остается случай, когда ρ красит $N_G(a)$ в 5 цветов. Тогда $d_G(a) = 5$, пусть $N_G(a) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, причем соседи упорядочены по выходу рёбер из a (по часовой стрелке). Не умаляя общности, можно считать, что $\rho(b_i) = i$ для всех $i \in [1..5]$.



- Пусть $G_{1,3}$ — индуцированный подграф G — a на вершинах цветов 1 и 3, а U — его компонента связности, содержащая b_1 . Если во всех вершинах U поменять местами цвета 1 и 3, раскраска останется правильной, а b_1 будет покрашена в цвет 3.
- Если в новой раскраске невозможно докрасить вершину a , в ее окрестности должен остаться цвет 1 — но в него может быть покрашена только вершина b_3 и только в случае $b_3 \in U$.
- Значит, достаточно рассмотреть случай, когда вершины b_1 и b_3 соединены путём $P_{1,3}$ по вершинам цветов 1 и 3 (см. рисунок).
- Аналогично, достаточно рассмотреть случай, когда вершины b_2 и b_4 соединены путём $P_{2,4}$ по вершинам цветов 2 и 4. Тогда пути $P_{1,3}$ и $P_{2,4}$ должны пересекаться, что, очевидно, невозможно.



- В 1880 году Тэйт опубликовал свой подход к доказательству 4СС. Доказательство оказалась неверным, но теорема об эквивалентной переформулировке 4СС оказалась очень полезной: в последующих работах авторы доказывали не собственно 4СС, а эквивалентную переформулировку о рёберных раскрасках триангуляции.

Определение

Пусть T — триангуляция. Назовём *Тэйтовой раскраской* триангуляции T такую раскраску рёбер T в три цвета, что все рёбра каждой грани разноцветны.

- Далее рассматриваются графы без петель, иначе вопросы о правильной раскраске вершин бессмысленны.

Теорема 7

(P. G. Tait, 1880.) Четыре утверждения равносильны.

1° Для любого плоского графа G выполняется $\chi(G) \leq 4$.

2° Для любого рёберно двусвязного плоского графа G выполняется $\chi^*(G) \leq 4$.

3° Для любого рёберно двусвязного плоского кубического графа G выполняется $\chi'(G) = 3$.

4° Для любой триангуляции T существует Тэйтова раскраска.

Доказательство. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Рёберно двусвязный граф G не имеет мостов, следовательно, его двойственный граф G^* не имеет петель. Тогда $\chi^*(G) = \chi(G^*) \leq 4$.

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$. Очевидно, двойственный граф T^* триангуляции T является рёберно двусвязным кубическим графом, а правильная раскраска его рёбер в 3 цвета — Тэйтовой раскраской рёбер T .

$4^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Пусть G — кубический рёберно двусвязный плоский граф. Очевидно, двойственный граф G^* — триангуляция, а Тэйтова раскраска триангуляции G^* является правильной раскраской рёбер G в три цвета.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. • Пусть G — плоский рёберно двусвязный кубический граф. У него есть правильная раскраска ρ^* граней в 4 цвета. Поскольку всё равно, как нумеровать цвета, мы будем считать, что ρ^* принимает значения из $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

• Так как G — рёберно двусвязный граф, каждое ребро $e \in E(G)$ разделяет две разные грани a и b . Мы положим $\rho'(e) = \rho^*(a) + \rho^*(b)$. Так как $a \neq b$, то $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$, следовательно, $\rho'(e) \neq (0, 0)$. Таким образом, ρ' — раскраска рёбер графа G в три цвета.

• Докажем, что раскраска ρ' — правильная. Пусть v — вершина графа G , а a, b, c — три содержащие её грани. Как уже отмечалось, все эти грани различны, любые две из них имеют общее ребро.

• Следовательно, $\rho^*(a)$, $\rho^*(b)$ и $\rho^*(c)$ — три разных цвета, откуда следует, что три цвета инцидентных вершине v рёбер $\rho^*(a) + \rho^*(b)$, $\rho^*(a) + \rho^*(c)$, $\rho^*(b) + \rho^*(c)$ также различны.

• Таким образом, ρ' — правильная раскраска рёбер G в 3 цвета.

• Следовательно, $\chi'(G) = 3$ (так как очевидно, что $\chi'(G) \geq 3$).

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$. • Достаточно рассмотреть связный граф G с $v(G) \geq 3$. По Лемме 8 граф G является подграфом триангуляции H .

• Рассмотрим рёберно двусвязный кубический граф H^* . Существует правильная раскраска ρ' рёбер этого графа в 3 цвета.

• Пусть $H_{i,j}^*$ — подграф H^* на рёбрах цветов $i, j \in \{1, 2, 3\}$ в раскраске ρ' . Тогда $d_{H_{i,j}^*}(v) = 2$ для любой вершины $v \in V(H^*)$, следовательно, $H_{i,j}^*$ — объединение нескольких циклов.

• Легко видеть, что существует правильная раскраска $\rho_{i,j}^*$ граней графа $H_{i,j}^*$ в два цвета.

• Рассмотрим произвольную грань a графа H^* .

Пусть a_{12} — грань H_{12}^* , частью которой является a ,
а a_{13} — грань H_{13}^* , частью которой является a (понятно, что a_{12} и a_{13} определены однозначно).

• Положим $\rho^*(a) = (\rho_{1,2}^*(a_{1,2}), \rho_{1,3}^*(a_{1,3}))$.

• Мы получили раскраску граней графа H^* в четыре цвета.

- Покажем, что раскраска ρ^* является правильной.
- Рассмотрим имеющие общее ребро e грани a и b графа H^* , пусть $a = a_{1,2} \cap a_{1,3}$, $b = b_{1,2} \cap b_{1,3}$ — определённые выше представления в виде пересечений граней.
- Если $\rho'(e) \in \{1, 2\}$, то $a_{1,2} \neq b_{1,2}$, причём эти грани графа $H_{1,2}^*$ граничат по ребру e , следовательно, $\rho_{1,2}^*(a_{1,2}) \neq \rho_{1,2}^*(b_{1,2})$, а тогда и $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$.
- Если $\rho'(e) = 3$, то аналогично $\rho_{1,3}^*(a_{1,3}) \neq \rho_{1,3}^*(b_{1,3})$ и $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$.
- Таким образом, $\chi(G) \leq \chi(H) = \chi^*(H^*) \leq 4$, что и требовалось доказать. □

Теорема 8

Пусть G — плоский граф. Тогда $\chi^*(G) \leq 2$ если и только если все вершины G имеют четную степень.

Доказательство. \Rightarrow . Пусть $d_G(a) = n$, упорядочим выходящие из a ребра в порядке обхода по часовой стрелке: ab_1, \dots, ab_n (нумерация циклическая, некоторые из вершин b_1, \dots, b_n могут совпадать).

• Как мы знаем, каждая пара соседних ребер ab_i, ab_{i+1} входит в границу одной грани — назовем ее f_i . Тогда для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ грани f_i и f_{i+1} — разного цвета, откуда очевидно следует, что n четно.

\Leftarrow . Индукция по числу ребер графа.

База для графа без ребер очевидна.

Переход. • Пусть для меньших чем G графов утверждение доказано.

• Так как все вершины графа G имеют четную степень, в G есть простой цикл Z .

• Тогда степени всех вершин графа $G' = G - E(Z)$ также четны, и грани G' по индукционному предположению можно покрасить в два цвета правильным образом.

- Вернем на изображение цикл Z — он делит плоскость на две области, внутри и вне цикла.
- Перекрасим все, что внутри Z , наоборот.
- Получится правильная раскраска граней графа G : любые две грани вне или внутри Z с общим ребром по-прежнему покрашены в разные цвета.
- Цикл Z разрезал некоторые грани графа G и теперь их части, граничащие по ребрам Z , покрашены в разные цвета. □

Теорема о 3 красках

- Понятно, что триангуляция — недвудольный граф. А что можно сказать о раскраске вершин триангуляции в три цвета?
- В 1898 году Хивуд впервые высказал гипотезу о том, что вершины триангуляции можно правильно покрасить в 3 цвета, если и только если степени всех ее вершин четны.
- Это было доказано лишь много лет спустя.

Теорема 9

(Л. И. Головина, И. М. Яглом, 1961.) Пусть T — плоская триангуляция. Тогда $\chi(T) = 3$, если и только если степени всех вершин T четны.

Доказательство. (Е. Аксенова, 2024.) ● Отметим, что для любой вершины $a \in T$ граф $T(N_T(a))$ содержит циклический маршрут длины $d_T(a)$ (так как концы соседних в плоском изображении рёбер, выходящих из a — различны и смежны). Обозначим этот циклический маршрут через $Z_{T,a}$.

⇒. Пусть вершина a имеет нечетную степень. Тогда $Z_{T,a}$ нечетен и для его правильной раскраски нужно задействовать все три цвета, но в этом случае невозможно покрасить вершину a .

⇐. Пусть все вершины T имеют четную степень. Докажем существование правильной раскраски вершин T в три цвета индукцией по $v(T)$.

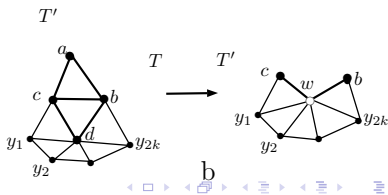
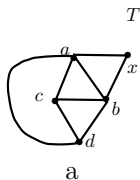
База для случая $v(T) = 3$ очевидна.

Переход. • Пусть $v(T) > 3$. Нам нужны две соседних треугольных грани abc и bcd такие, что $a \neq d$ и $ad \notin E(T)$.

• Предположим, что одна из этих неприятностей с вершинами a и d случилась. Тогда цикл abd (из двух кратных ребер при $a = d$ или треугольник при $ad \in E(T)$) делит плоскость на две части, в одной из них лежит вершина c (см. рисунок а).

• Так как $v(T) > 3$, в другой части ребро ab входит в грань abx . Очевидно $x \neq d$ (иначе $d_T(b) = 3 \not\equiv 2$, противоречие). Тогда $c \neq x$ и $cx \notin E(T)$.

• Таким образом, можно считать, что $a \neq d$ и $ad \notin E(T)$ (иначе рассмотрим грани bac и abx).



- Рассмотрим меньшую триангуляцию $T' = (T - bc) \# ad$ (склеиваем вершины a и d в новую вершину w , склеиваем пары ребер ab и bd , а также ac и cd , см. рисунок б).

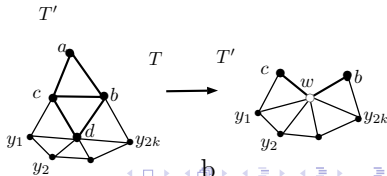
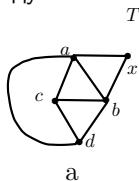
- Тогда все степени вершин T' четны ($d_{T'}(ad) = d_T(a) + d_T(d) - 2$, $d_{T'}(b) = d_T(b) - 2$, $d_{T'}(c) = d_T(c) - 2$, а степени остальных вершин в T и T' одинаковы).

- По индукционному предположению триангуляция T' имеет правильную раскраску ρ в 3 цвета.

- НУО $\rho(w) = 1$ и $\rho(b) = 2$. Перенесем цвета вершин в T и положим $\rho(a) = \rho(d) = 1$.

- Остается лишь проверить, что $\rho(c) \neq \rho(b)$.

- Так как $d_T(d)$ четно, от db до dc из d выходит четное число ребер — скажем, dy_1, \dots, dy_{2k} против часовой стрелки. Эти же ребра выходят в T' из вершины ad против часовой стрелки между wb и wc .



- Тогда в последовательности вершин b, y_1, \dots, y_{2k}, c каждые две соседние смежны в T' , и все они имеют в ρ цвет, отличный от $\rho(w) = 1$.
- Значит, в этой последовательности чередуются цвета 2 и 3, тогда $\rho(c) = 3$, что нам и нужно. \square

