

# Теория графов. Глава 6. Планарные графы.

Д. В. Карпов

2023-2024

## Определение

Граф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы его рёбра не пересекались во внутренних точках. Вершины изображаются точками, а рёбра — ломаными. Внутренние точки любой ломаной, изображающей ребро графа, не должны быть вершинами графа.

## Определение

*Плоским графом* (или *плоским изображением*) мы будем называть конкретное изображение планарного графа на плоскости без пересечений и самопересечений рёбер.

- Таким образом, планарному графу могут соответствовать разные плоские графы.

## Грань плоского графа

- Изображение плоского графа делит плоскости на части — *грани*. Это ключевой объект для плоского графа, отличающий его от абстрактного планарного графа. Ниже мы дадим формальное определение граней.
- На плоскости изображен плоский граф  $G$ . Пусть  $M$  — множество всех точек плоскости, не входящих в изображение  $G$ .
- Пусть запись  $A \sim B$  означает, что точки  $A, B \in M$  можно соединить ломаной, не пересекающей изображение графа  $G$ . Укажем три важных свойства  $\sim$ .

### Утверждение

$\sim$  — отношение эквивалентности.

**Доказательство.** • **Рефлексивность.**  $A \sim A$

• **Симметричность.** Если  $A \sim B$ , то  $B \sim A$ .

• **Транзитивность.** Если  $A \sim B$  и  $B \sim C$ , то  $A \sim C$ . □

## Определение

**Грани** плоского графа  $G$  — классы эквивалентности по отношению  $\sim$ .

- Таким образом, все точки плоскости, не лежащие на изображении графа  $G$ , разбиты на грани.
- Две точки из одной грани графа  $G$  могут быть соединены ломаной, не пересекающей изображение  $G$ .
- Любая ломаная, соединяющая две точки из разных граней, пересекает изображение  $G$ .

## Теорема Жордана для замкнутой ломаной

### Теорема 1

**(С. Jordan, 1887.)** Замкнутая несамопересекающаяся ломаная  $P$  делит точки плоскости, не лежащие на  $P$ , на две такие части, что выполнены следующие условия:

- (1) любые две точки из одной части можно соединить ломаной, не пересекающей  $P$ ;
- (2) любая ломаная, соединяющая две точки из разных частей, пересекает  $P$ .

**Доказательство.** • Пусть  $P_1 \dots P_m$  — вершины  $P$  в порядке обхода по часовой стрелке. Обозначим через  $M$  множество всех точек плоскости, не лежащих на  $P$ .

- Зафиксируем на плоскости вектор  $\ell$ , не параллельный ни одной из сторон  $P$ . Из каждой точки  $A \in M$  выпустим луч  $\ell(A)$  в направлении  $\ell$ .
- В случае, если  $\ell(A)$  содержит вершину  $P_i$  многоугольника  $P$ , но стороны  $P_{i-1}P_i$  и  $P_iP_{i+1}$  лежат в одной полуплоскости относительно содержащей  $\ell(A)$  прямой, мы будем говорить, что многоугольник  $P$  в вершине  $P_i$  **касается**  $\ell(A)$ .

- Посчитаем число  $p(A)$  точек пересечения  $\ell(A)$  с  $P$ , не являющихся касаниями. Очевидно, что  $p(A)$  конечно.
- Часть  $M_0$  будет состоять из всех точек  $A \in M$ , для которых  $p(A)$  четно, а часть  $M_1$  будет состоять из всех точек  $B \in M$ , для которых  $p(B)$  нечетно.

### Утверждение

$M_0$  и  $M_1$  непусты.

**Доказательство.** • Рассмотрим прямую  $\ell_0$ , параллельную вектору  $\ell$ , и проходящую через внутреннюю точку ломаной  $P$  (то есть через, не являющуюся ее вершиной).

- При движении по  $\ell_0$  в направлении вектора  $\ell$  отметим последнее пересечение с  $\ell$  во внутренней точке — пусть это точка  $X$ .
- Рассмотрим содержащий  $X$  малый отрезок  $[Y, Z]$  на этом  $\ell_0$ , не пересекающий  $P$  в отличных от  $X$  точках, пусть  $Y$  лежит перед  $X$  при движении в направлении  $\ell$ .
- Тогда  $p(Y) = 1$  (единственное пересечение в точке  $X$ ), а  $p(Z) = 0$ .

## Утверждение

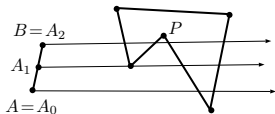
Пусть  $A, B \in M$  и отрезок  $[A, B]$  не пересекает  $P$ . Тогда  $p(A)$  и  $p(B)$  имеют одинаковую четность. В частности, выполнено условие (2).

**Доказательство.** • Если  $AB \parallel \ell$ , то утверждение очевидно.

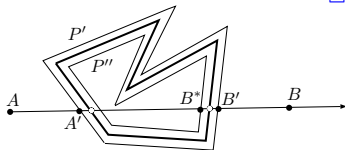
• Если нет, то отметим на отрезке  $AB$  все такие точки  $A_1, \dots, A_k$  в направлении от  $A$  к  $B$ , что  $\ell(A_i)$  касается  $P$  (если они есть). Положим  $A_0 = A$  и  $A_{k+1} = B$ .

• Тогда для каждого  $i \in [0..k]$ , все точки отрезка  $[A_i, A_{i+1}]$  имеют, очевидно, одинаковое значение функции  $p$ , а при переходе на соседний отрезок функция  $p$  может иметь четный скачок (каждое касание  $\ell(A_i)$  многоугольника  $P$  добавляет точкам с одной стороны от  $A_i$  двойку к количеству пересечений, см. рис. а).

• В любом случае, на всем отрезке  $[A, B]$  функция  $p$  имеет одинаковую четность. □



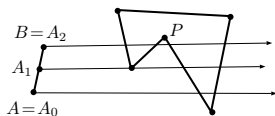
а



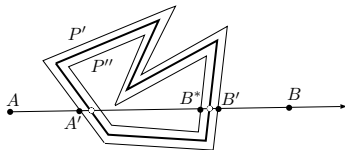
б

## Докажем (1).

- Пусть  $A, B \in M_i$ . Если отрезок  $[A, B]$  не пересекает  $P$ , то все понятно. Пусть пересекает, причем  $A_1$  и  $B_1$  — ближайшие к  $A$  и  $B$  соответственно точки пересечения.



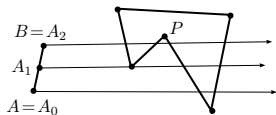
a



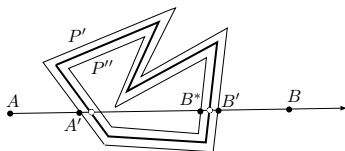
b

- Отметим на отрезке  $[A, A_1]$  точку  $A'$  очень близко к  $A_1$ , а на отрезке  $[B_1, B]$  — точку  $B'$  очень близко к  $B_1$ , пусть  $|A_1A'| = |B_1B'| = \delta$  (см. рис. b). Тогда  $\rho(A) = \rho(A')$  и  $\rho(B) = \rho(B')$ .
- Проведем вдоль каждой стороны многоугольника  $P$  две параллельных прямых на расстоянии  $\delta$  с разных сторон, выбрав это число столь малым, чтобы в результате получились два “очень близких” к  $P$  многоугольника  $P'$  и  $P''$  так, чтобы стороны  $P'$  и  $P''$  не пересекали сторон  $P$ . (Достаточно выбрать  $\delta$  меньше, чем минимальное расстояние от стороны  $P$  до вершины, на ней не лежащей.)

- НУО  $A'$  лежит на  $P'$ . Если и  $B'$  лежит на  $P'$ , то мы построили от  $A'$  до  $B'$  ломаную, не пересекающую  $P$ , тогда такая ломаная построена и от  $A$  до  $B$ .



a



b

- Пусть  $B'$  лежит на  $P''$ , тогда обозначим через  $B^*$  точку пересечения  $P'$  с прямой  $AB$ , лежащую около  $B$  (разумеется, на расстоянии  $\delta$ ).
- Несложно понять, что  $p(B^*) - p(B') = \pm 1$  (разница состоит в том, что ровно для одной из этих точек учитывается пересечение около точки  $B_1$ ).
- Однако применив доказанное выше утверждение, получим  $p(B^*) \equiv p(A') \equiv p(A) \equiv p(B) \equiv p(B') \pmod{2}$ , противоречие. □

## Плоскость и сфера

- Плоскость и сфера переводятся друг в друга *стереографической проекцией*.
- Поставим сферу на плоскость, точку касания назовём южным полюсом, противоположную точку — северным полюсом  $N$ . Каждая точка  $A \neq N$  сферы перейдёт в точку пересечения плоскости и луча  $NA$ .

### Утверждение

*Граф является планарным тогда и только тогда, когда его можно изобразить на сфере без пересечения рёбер во внутренних точках.*

**Доказательство.** • Переводя изображение графа со сферы на плоскость нужно лишь выбрать северный полюс так, чтобы он не совпадал ни с одной из вершин графа и не попадал на рёбра. □

- Плоское изображение планарного графа ограничено (его можно поместить в большой круг).
- Поэтому в плоском изображении планарного графа есть ровно одна неограниченная *внешняя грань*, которая визуально сильно отличается от всех остальных, а в сферическом изображении такой грани нет.
- Грань сферического изображения графа, содержащая северный полюс будет соответствовать при стереографической проекции внешней грани плоского изображения.
- Таким образом, перемещая северный полюс на разные грани, можно любую грань сферического изображения сделать внешней гранью в плоском изображении графа. Это лишний раз подчеркивает, что на самом деле внешняя грань не отличается от остальных.

## Граница грани

• Рассмотрим ребро  $e$  плоского графа  $G$ . Либо по разные стороны от  $e$  расположены разные грани (тогда ребро  $e$  — *граничное* ребро этих двух граней), либо по обе стороны от  $e$  — одна и та же грань, тогда назовем ребро  $e$  *внутренним* ребром этой грани. Обозначим через  $E_d$  множество всех граничных и внутренних рёбер грани  $d$ .

• *Граничные вершины* грани  $d$  — это концы рёбер из  $E_d$ . Обозначим множество граничных вершин грани  $d$  через  $V_d$ .

• Граничные и внутренние рёбра грани  $d$  — это в точности те рёбра, до которых от внутренней точки грани  $d$  можно прийти по ломаной, не пересекая изображение графа.

• Граничные вершины грани  $d$  — это в точности те вершины, до которых можно прийти по ломаной от внутренних точек этой грани, не пересекая её граничных и внутренних рёбер.

• *Граница* грани  $d$  — это подграф  $B(d)$  графа  $G$  с множеством вершин  $V_d$  и множеством рёбер  $E_d$ .

• *Размер границы* грани  $d$  мы определим, как количество граничных рёбер этой грани плюс удвоенное количество внутренних рёбер. Обозначать эту величину будем через  $b(d)$ .

## Свойство 1

*Если сложить размеры границ всех граней, получится удвоенное количество рёбер.*

**Доказательство.** Внутреннее ребро грани два раза считается в размере границы этой грани. Граничное ребро двух граней по разу считается в их размерах. □

## Свойство 2

*Любые две точки на границе грани  $d$  можно соединить ломаной, проходящей в  $d$ .*

**Доказательство.** Пусть  $A$  — внутренняя точка грани  $d$ . От нее можно провести ломаные, не пересекающие изображение  $G$  до любых двух граничных. Все точки на этих ломаных лежат в  $d$ . □

### Свойство 3

Если две точки  $A$  и  $B$  на изображении графа  $G$  можно соединить ломаной  $L$ , не пересекающей изображения  $G$ , то  $A$  и  $B$  лежат на границе некоторой грани.

**Доказательство.**  $A$  и  $B$  лежат на границе грани  $d$ , содержащей все внутренние точки  $L$  (см. рисунок а).  $\square$

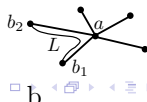
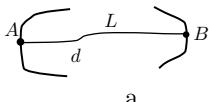
### Определение

Рассмотрим любую вершину  $a$  плоского графа  $G$  и упорядочим выходы ребер из  $a$  по часовой стрелке. Два ребра, выходы которых — соседние в этом порядке, будем называть *соседними в вершине  $a$* .

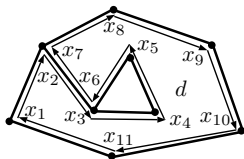
### Свойство 4

Пусть  $ab_1$  и  $ab_2$  — два соседних ребра в вершине  $a$ . Тогда рёбра  $ab_1$  и  $ab_2$  лежат в границе некоторой грани.

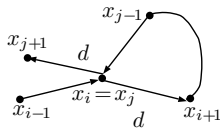
**Доказательство.** вершины  $b_1$  и  $b_2$  можно соединить ломаной вдоль  $b_1ab_2$ , не пересекающей изображения  $G$  (см. рисунок б). Поэтому, рёбра  $ab_1$  и  $ab_2$  лежат в границе некоторой грани.  $\square$



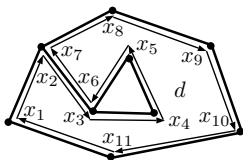
- Пусть  $G$  — плоский граф,  $d \in F(G)$ , а  $x_1x_2 \in E_d$ .
- Пройдем по ребру  $x_1x_2$  от  $x_1$  к  $x_2$ . НУО справа по ходу движения расположена грань  $d$ . Повернем в вершине  $x_2$  направо до выхода соседнего ребра  $x_2x_3$ . (Если  $d_G(x_2) = 1$ , то  $x_3 = x_1$ , это нам не мешает.) Очевидно,  $x_2x_3 \in E_d$ . Пойдем по этому ребру от  $x_2$  к  $x_3$ , справа опять будет расположена грань  $d$ . И так далее. В конечном итоге мы вернемся на ребро  $x_1x_2$  (в вершину  $x_1$  мы можем вернуться и раньше!). Получился замкнутый циклический маршрут (см. рис. а).



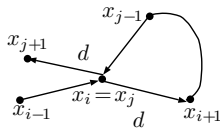
а



б

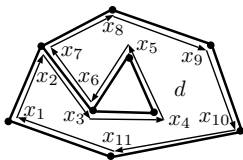


a

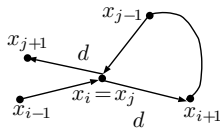


b

- Пусть получился циклический маршрут  $Z = x_1x_2 \dots x_k$ . Рассмотрим вершину  $x_i$ . по построению,  $Z$  обходит вокруг  $x_i$  — скажем, против часовой стрелки. Пусть мы вышли из вершины  $x_i$  по ребру  $x_ix_{i+1}$ , а следующий раз вернулись в эту вершину по ребру  $x_{j-1}x_j$  (в этом случае  $x_i = x_j$ , см. рис. b).
- Тогда сектор между выходами рёбер  $x_ix_{i+1}$  и  $x_jx_{j-1}$  из вершины  $x_i = x_j$  не принадлежит грани  $d$ . Следовательно,  $Z$  проходит все рёбра из  $E_d$ , инцидентные вершине  $x_i$ . Поскольку это верно для любой вершины  $Z$ , этот маршрут обходит все рёбра одной из компонент графа  $B(d)$ .
- Обозначим через  $Z(U)$  такой маршрут для компоненты  $U$ , а через  $Z(d)$  — объединение построенных маршрутов для всех компонент  $B(d)$ .



a



b

- Если маршрут  $Z(d)$  проходит ребро  $e$  дважды, то, очевидно, в разных направлениях. Значит, по обе стороны от  $e$  расположена грань  $d$ , то есть  $e$  — внутреннее ребро  $d$ .
- Пусть  $e$  — внутреннее ребро грани  $d$  (см. ребро  $x_2x_3 = x_6x_7$  на рисунке). Тогда при проходе по  $e$  в любом из направлений справа будет расположена грань  $d$ . Поэтому, маршрут  $Z(d)$  дважды пройдет  $e$  — в обоих направлениях.

## Лемма 1

Для плоского графа  $G$  выполнены следующие утверждения.

- 1) Если  $d \in F(G)$  и  $B(d)$  несвязна, то разные компоненты связности графа  $B(d)$  лежат в разных компонентах связности графа  $G$ .
- 2) Граф  $G$  несвязен, если и только если он имеет грань с несвязной границей.

**Доказательство.** 1) • Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — две компоненты  $B(d)$ . Изображение компоненты  $B_1$  ограничено и не пересекает других компонент  $B(d)$ . Следовательно, изображение  $B_1$  можно отделить от изображения  $B_2$  замкнутой ломаной в грани  $d$ , не пересекающей ребер  $G$  (такую ломаную можно построить, почти повторив маршрут  $Z(B_1)$ : вместо каждого прохода по ребру, проведем его копию на малом расстоянии  $\delta$  в грани  $d$ , как в доказательстве теоремы Жордана).

• Значит, между  $B_1$  и  $B_2$  нет пути в графе  $G$ .

2) Очевидно, можно обойти все грани графа  $G$ , каждый раз переходя в грань имеющую с предыдущей общую сторону или вершину (достаточно отметить по внутренней точке на каждой грани и проложить на плоскости маршрут, все эти точки обходящий).

- Тогда, если граница каждой грани связна, то связно и их объединение, а это граф  $G$ , противоречие. Значит, несвязный граф имеет грань с несвязной границей.
- Если  $G$  имеет грань с несвязной границей, то  $G$  несвязен по пункту 1. □



### Лемма 3

Пусть  $d$  — грань реберно двусвязного графа  $G$ . Тогда  $B(d)$  — цикл (не обязательно простой).

**Доказательство.** • Так как  $G$  связан,  $B(d)$  — связный граф по Лемме 1. Значит, и  $Z(d)$  связан. Так как внутренних рёбер у  $d$  нет (граф не имеет мостов),  $Z(d)$  — цикл.  $\square$

• Докажем, что граница грани почти всегда однозначно задает эту грань.

### Лемма 4

Если две разные грани  $f$  и  $f'$  плоского графа  $G$  имеют одинаковые границы, то  $G$  — простой цикл.

**Доказательство.** • Пусть  $B$  — общая граница этих граней,  $e \in E(B)$ . По Лемме 2 тогда  $e$  — не мост графа  $G$ , а значит, существует простой цикл  $Z$ , содержащий  $e$ .

• Тогда  $Z$  делит плоскость на две области —  $O \supset f$  и  $O' \supset f'$ .

• Пусть  $e' \in B \setminus Z$ . Тогда  $e'$  лежит внутри одной из областей  $O$  и  $O'$  — скажем, в  $O'$ . В этом случае,  $e'$  не может быть граничным ребром грани  $f \subset O$ , противоречие.

• Итак,  $B$  — простой цикл. Остается доказать, что  $G$  — простой цикл.

- Если  $f = O$  и  $f' = O'$ , то  $G = B$ , что нам и нужно.
- Пусть, скажем,  $f \neq O$ .
- Так как каждая грань целиком лежит в одной из областей,  $O$  разбивается на грани.
- Значит, существует еще одна грань  $f^* \subset O$ .
- Пусть  $X \in f$  и  $X^* \in f^*$ .
- Так как точки  $X$  и  $X^*$  лежат в области  $O$ , их можно соединить ломаной  $L$ , проходящей в  $O$ .
- Пойдем по ломаной  $L$  от точки  $X$ . В некоторый момент мы перейдем из  $f$  в другую грань. Значит, мы пересечем изображение графа  $G$  — скажем, ребро  $e$ .
- Тогда  $e$  — граничное ребро грани  $f$ . Но при этом  $e$  изображено внутри  $O$  (там проходит ломаная  $L$ ), следовательно,  $e \notin E(B)$ .
- Значит,  $B(f) \neq B$ , противоречие. □

## Лемма 5

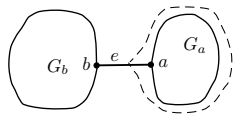
Пусть  $G$  — плоский граф.

1) Если грань  $d$  и ее граничная вершина  $a$  таковы, что  $B_1$  и  $B_2$  — разные компоненты графа  $B(d) - a$ , то  $B_1$  и  $B_2$  лежат в разных компонентах графа  $G - a$ . В частности,  $a$  — точка сочленения графа  $G$ .

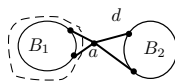
2) Граф  $G$  без петель вершинно двусвязен, если и только если границы его граней — простые циклы.

**Доказательство.** 1) Аналогично доказательству Леммы 1, плоское изображение  $B_1$  можно отделить от изображения  $B_2$  ломаной, не пересекающей ребер  $G - a$  (см. рис. b), а значит, между  $B_1$  и  $B_2$  нет рёбер в графе  $G - a$ .

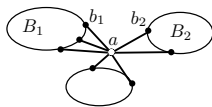
• Следовательно,  $a$  — точка сочленения графа  $G$ .



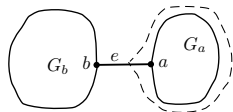
a



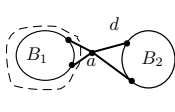
b



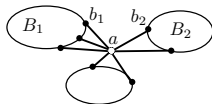
c



a



b



c

2) • Пусть  $a$  — точка сочленения графа  $G$ . Рассмотрим плоское изображение несвязного графа  $G - a$ , полученное из  $G$  удалением вершины  $a$ .

- В силу Леммы 1 граф  $G - a$  имеет несвязную грань  $d$ , а граф  $G$  не имеет. Значит,  $a$  лежит на грани  $d$  и смежна со всеми компонентами ее границы.
- Упорядочим выходы ребер из  $a$  по часовой стрелке. Тогда есть два соседних ребра, выходящих к разным компонентам графа  $B(d)$  — скажем, ребро  $ab_1$  к компоненте  $B_1$  и ребро  $ab_2$  к компоненте  $B_2$  (см. рис. c).
- Точка сочленения  $a$  отделяет  $b_1$  от  $b_2$  в графе  $G$ . Существует грань  $f$  графа  $G$ , граница которой содержит  $a$ ,  $b_1$  и  $b_2$ . Тогда  $a$  — точка сочленения  $B(f)$ .
- Наоборот, если грань  $d$  такова, что  $B(d)$  имеет точку сочленения, то по пункту 1 граф  $G$  также имеет точку сочленения.

## Грани трёхсвязного графа

### Определение

- Цикл  $C$  графа  $G$  — *неразделяющий*, если граф  $G - V(C)$  связан.
- Цикл  $C$  — *индуцированный*, если он не имеет хорд (то есть, является индуцированным подграфом на своем множестве вершин).

### Лемма 6

*Пусть  $G$  — трёхсвязный плоский граф. Тогда множество границ его граней есть в точности множество его неразделяющих индуцированных циклов.*

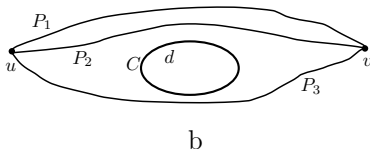
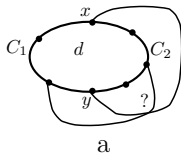
**Доказательство.**  $\supset$ . Пусть  $C$  — неразделяющий индуцированный цикл в  $G$ . Тогда в одной из областей, на которые  $C$  делит плоскость — назовём ее  $d$  — нет вершин графа  $G$ . Так как индуцированный цикл  $C$  не имеет диагоналей, внутри  $d$  рёбер тоже нет. Значит  $d$  — грань, а цикл  $C$  — её граница.

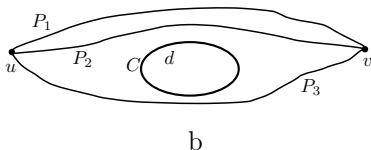
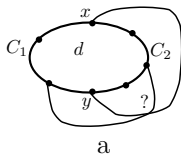
$C$ . • Пусть  $C$  — граница грани  $d$  графа  $G$ . Тогда  $C$  — простой цикл.

• Предположим, что  $C$  имеет диагональ  $xu$ . Вершины  $x$  и  $u$  делят цикл  $C$  на две дуги  $C_1$  и  $C_2$ .

• Граф  $G - x - u$  должен быть связан ввиду трёхсвязности графа  $G$ . Значит, в  $G - x - u$  есть  $C_1C_2$ -путь  $P$ .

• Понятно, что и диагональ  $xu$ , и путь  $P$  должны проходить вне грани  $d$ , но тогда они пересекаются (см. рис. а), что невозможно.





- Докажем, что граф  $G - V(C)$  связан.
- Пусть  $u, v \in V(G) \setminus V(C)$ . По теореме Уитни в трёхсвязном графе  $G$  существуют три независимых  $uv$ -пути  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ , которые делят плоскость на три области.
- Грань  $d$  лежит в одной из этих областей, пусть это область, граница которой образована путями  $P_2$  и  $P_3$  (см. рис. b). Тогда  $P_1$  не пересекается с границей грани  $d$  — циклом  $C$  — а значит, вершины  $u$  и  $v$  связаны в  $G - V(C)$ .
- Таким образом, граница грани графа  $G$  является индуцированным неразделяющим циклом. □

## Разные изображения одного графа. Изоморфизм

- Слева и справа на рисунке — плоские изображения одного и того же графа. Но это разные изображения! У правого изображения есть грань, в границе которой 6 вершин, а у левого — нет.



### Определение

Пусть  $G$  и  $G'$  — два плоских графа, а биекция  $\varphi : V(G) \rightarrow V(G')$  удовлетворяет следующим условиям.

(1)  $xu \in E(G) \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E(G')$ ;

(2)  $U \subset V(G)$  является множеством граничных вершин некоторой грани графа  $G$ , если и только если  $\varphi(U) = \{\varphi(x) : x \in U\}$  является множеством граничных вершин некоторой грани графа  $G'$ .

Тогда  $\varphi$  — *изоморфизм плоских графов*  $G$  и  $G'$ , а сами эти плоские графы *изоморфны*.

## Теорема 2

(Н. Whitney, 1933.) Любые два плоских изображения трёхсвязного планарного графа  $G$  изоморфны как плоские графы.

**Доказательство.** • Пусть  $G_1$  и  $G_2$  плоские изображения  $G$ , причем  $x_1 \in V(G_1)$  и  $x_2 \in V(G_2)$  — изображения вершины  $x \in V(G)$ .

• Определим отображение  $\varphi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  так:  $\varphi(x_1) = x_2$  для любой вершины  $x_1 \in V(G_1)$ . Очевидно,  $x_1 y_1 \in E(G_1) \iff x y \in E(G) \iff \varphi(x_1) \varphi(y_1) = x_2 y_2 \in E(G_2)$ .

• По Лемме 6 границы граней плоского графа  $G_1$  — это в точности неразделяющие индуцированные циклы графа  $G_1$ , а границы граней плоского графа  $G_2$  — это в точности неразделяющие индуцированные циклы  $G_2$ . Это свойство не имеет отношения к плоскому изображению.

•  $U_1 \subset V(G_1)$  — множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в  $G_1$  (то есть, границы грани  $G_1$ )  
 $\iff U \subset V(G)$  множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в  $G$   $\iff \varphi(U_1) = U_2 \subset V(G_2)$  — множество вершин неразделяющего индуцированного цикла в  $G_2$  (то есть, границы грани  $G_2$ ).

• Следовательно,  $\varphi$  — изоморфизм плоских графов.

## Формула Эйлера

- В разных плоских изображениях планарного графа  $G$  могут получаться разные грани. Однако их количество является инвариантом графа, как говорит нам формула Эйлера.

### Теорема 3

**(L. Euler, 1752.)** Пусть  $G$  — плоский граф с  $v$  вершинами,  $e$  рёбрами и  $f$  гранями, имеющий  $k$  компонент связности. Тогда  $v - e + f = 1 + k$ .

**Доказательство.** Индукцией по количеству рёбер.

**База** для случая, когда граф  $G$  — лес, очевидна: в этом случае  $f = 1$ ,  $e = v - k$ .

**Переход** • Пусть для меньших графов формула Эйлера уже доказана и  $G$  — не лес.

- Тогда в графе есть цикл, пусть ребро  $\ell$  входит в цикл. Так как  $\ell$  — не мост, по ребру  $\ell$  граничат две разные страны, которые объединяются в одну в графе  $G - \ell$ .
- Таким образом, в графе  $G - \ell$   $v$  вершин,  $k$  компонент,  $e - 1$  ребро и  $f - 1$  страна. Теперь формула Эйлера для  $G$  следует из формулы Эйлера для  $G - \ell$ , которая верна по индукционному предположению.

- Мы будем обозначать количество вершин, рёбер и граней плоского графа  $G$  буквами  $v$ ,  $e$  и  $f$  соответственно.

## Следствие 1

Пусть  $G$  — планарный граф без петель и кратных рёбер,  $v \geq 3$ . Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1)  $e \leq 3v - 6$ .
- 2) Если граф  $G$  — двудольный, то  $e \leq 2v - 4$ .

**Доказательство.** 1) • Докажем, что размер границы каждой грани графа  $G$  не менее 3. В самом деле, пусть  $d \in F(G)$ ,  $b(d) \leq 2$ .

- Так как петель и кратных рёбер нет,  $B(d)$  не имеет циклов. Следовательно, все рёбра внутренние. Тогда такое ребро всего одно, а значит,  $e = 1$  и утверждение очевидно.
- Сумма размеров границ всех граней равна  $2e$ , а размер каждой границы не менее 3. Следовательно,  $2e \geq 3f$  или  $f \leq \frac{2e}{3}$ .
- Тогда из формулы Эйлера  $v - \frac{e}{3} = v - e + \frac{2e}{3} \geq v - e + f \geq 2$ , откуда следует доказываемое неравенство.

2) • Докажем, что размер границы каждой грани двудольного графа  $G$  не менее 4.

• В самом деле, пусть  $d \in F(G)$ ,  $b(d) \leq 3$ . Поскольку в двудольном графе нет циклов длины 3, и в  $G$  нет кратных рёбер, все рёбра внутренние. Тогда такое ребро всего одно, а значит,  $e = 1$  и утверждение очевидно.

• Сумма размеров границ всех граней равна  $2e$ , а размер каждой границы не менее 4. Следовательно,  $f \leq \frac{e}{2}$ .

• Тогда из формулы Эйлера

$v - \frac{e}{2} = v - e + \frac{e}{2} \geq v - e + f \geq 2$ , откуда следует доказываемое неравенство. □

## Следствие 2

*Пусть  $G$  — планарный граф без петель и кратных рёбер. Тогда  $\delta(G) \leq 5$ .*

**Доказательство.** • В случае  $v \leq 2$  утверждение очевидно.

• Пусть  $v \geq 3$  и при этом  $\delta(G) \geq 6$ . Тогда  $6v \leq 2e$ , то есть,  $e \geq 3v$  — противоречие со Следствием 1. □

### Следствие 3

$K_5$  и  $K_{3,3}$  — непланарные графы.

**Доказательство.** 1) Пусть  $K_5$  планарен. Для этого графа  $v = 5$ ,  $e = 10$ . По пункту 1 следствия 1 мы имеем  $10 = e \leq 3v - 6 = 9$ , что неверно.

2) Пусть  $K_{3,3}$  планарен. Для этого двудольного графа  $v = 6$ ,  $e = 9$ . По пункту 2 следствия 1 мы имеем  $9 = e \leq 2v - 4 = 8$ , что неверно. □

## Определение

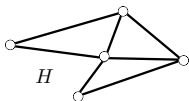
- Граф  $H'$  называется *подразбиением* графа  $H$ , если  $H'$  может быть получен из  $H$  заменой некоторых рёбер на простые пути (каждое заменяемое ребро  $xy$  меняется на простой  $xy$ -путь). При этом, все добавляемые вершины различны и имеют степень 2.
- Вершины  $H$  в графе  $H'$  называются *главными*.
- $G \supset H$  означает, что граф  $G$  имеет подграф, изоморфный подразбиению графа  $H$ .

## Следствие 4

- 1) Подразбиение графа  $H$  планарно, если и только если  $H$  планарен.
- 2) Любое подразбиение графа  $K_5$  или  $K_{3,3}$  непланарно.

**Доказательство.** 1) Изображение как ребра, так и простого пути — ломаная.

- 2) Следует из пункта 1 и Следствия 3. □



## Лемма 7

Пусть  $x, y \in V(G)$ ,  $xy \in E(G)$ . Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Если  $G \cdot xy \supset K_{3,3}$ , то  $G \supset K_{3,3}$ .
- 2) Если  $G \cdot xy \supset K_5$ , то  $G \supset K_5$  или  $G \supset K_{3,3}$ .

**Доказательство.** • Пусть  $w = x \cdot y$ , а  $H$  — подграф  $G \cdot xy$ , являющийся подразбиением  $K_{3,3}$  или  $K_5$ .

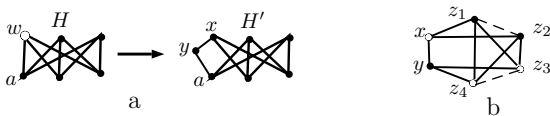
• Если  $w \notin V(H)$  то, очевидно,  $G \supset K_{3,3}$  или  $G \supset K_5$ , соответственно.

• Далее  $w \in V(H)$ . Построим подграф  $H'$  графа  $G$  следующим образом:  $V(H') = V(H) \setminus \{w\} \cup \{x, y\}$ . Все рёбра из  $E(H)$ , не инцидентные  $w$ , включим в  $E(H')$ . Для каждого ребра  $aw \in E(H)$  включим его в  $E(H')$  то из рёбер  $ax$  или  $ay$ , которое есть в графе  $G$  (если есть оба этих ребра, возьмем любое из них). Наконец, поместим в  $E(H')$  ребро  $xy$ .

• Рёбра графа  $H' - xy$ , инцидентные вершине  $x$ , назовем **красными**, а рёбра графа  $H' - xy$ , инцидентные вершине  $y$  — **синими**. Вместе красных и синих рёбер ровно  $d_H(w)$ .

• Если в графе  $H'$  нет синих рёбер, то  $H' - y$  — подграф графа  $G$ , изоморфный  $H$ . Аналогично для красных рёбер. В этом случае доказательство леммы закончено.

- Пусть  $ay$  — единственное синее ребро в  $H'$ . Тогда ребру  $aw \in E(H)$  соответствует путь  $aux$  в графе  $H'$ , то есть,  $H'$  является подразбиением графа  $H$  (см. рис. а). В этом случае лемма доказана, аналогично для случая, когда есть ровно одно красное ребро.



- Пусть теперь и красных, и синих рёбер не менее, чем по два. Тогда  $d_H(w) \geq 4$ , откуда сразу же следует, что  $H \supset K_5$ ,  $d_H(w) = 4$ .
- Пусть тогда  $z_1, z_2, z_3, z_4$  — четыре оставшиеся главные вершины графа  $H$ . Каждая пара из вершин  $w, z_1, z_2, z_3, z_4$  соединена в  $H$  путём — подразбиением соответствующего ребра графа  $K_5$ . Разные пути не имеют общих внутренних вершин. Этим путям соответствуют пути в графе  $H'$ .
- НУО в  $H'$  есть  $xz_1$ -путь,  $xz_2$ -путь,  $yz_3$ -путь и  $yz_4$ -путь (см. рис. б). Тогда  $H' \supset K_{3,3}$ : каждая из вершин  $x, z_3, z_4$  соединена путём с каждой из вершин  $y, z_1, z_2$ , разные пути не имеют общих внутренних вершин.



## Теорема 4

(К. Kuratowski, 1930) *Граф  $G$  (возможно, имеющий кратные рёбра и петли) непланарен, если и только если  $G$  имеет подграф, являющийся подразбиением  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .*

**Доказательство.**  $\Leftarrow$ . Следствие 4.

$\Rightarrow$ . • Предположим противное и рассмотрим минимальный контрпример  $G$  (непланарный граф, не содержащий подразбиений  $K_5$  и  $K_{3,3}$ ).

• Любой не содержащий подразбиений  $K_5$  и  $K_{3,3}$  граф с меньшим чем  $G$  числом вершин или с таким же, как у  $G$  числом вершин и меньшим числом рёбер обязательно является планарным.

### Утверждение 1

$G$  не имеет петель и кратных рёбер.

**Доказательство.** • Пусть  $e$  — петля графа  $G$ . Тогда граф  $G - e$  планарен и из его планарности следует планарность графа  $G$  (можно дорисовать петлю к плоскому изображению  $G - e$ ).

• Теперь пусть  $G$  имеет два кратных ребра  $e$  и  $f$ . Тогда граф  $G - e$  планарен и из его планарности следует планарность графа  $G$  (можно дорисовать ребро  $e$  вдоль ребра  $f$  в плоском изображении  $G - e$ ).

## Утверждение 2

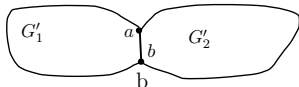
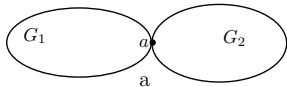
$G$  трехсвязен.

**Доказательство.** • Если  $G$  несвязен, то его компоненты не содержат подразбиений  $K_5$  и  $K_{3,3}$ , а значит, планарны. Тогда планарен и граф  $G$ , противоречие.

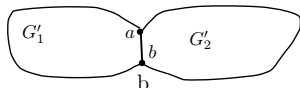
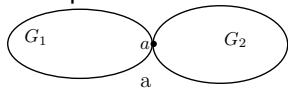
• Пусть  $G$  имеет точку сочленения  $a$ . Тогда  $G = G_1 \cup G_2$ , где  $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\}$ .

• Графы  $G_1$  и  $G_2$  не содержат подразбиений  $K_5$  и  $K_{3,3}$ , а значит, планарны.

• Тогда планарен и граф  $G$  (можно изобразить  $G_1$  и  $G_2$  так, чтобы  $a$  оказалась на границе внешней грани обоих изображений и склеить их, см. рисунок а). Противоречие.

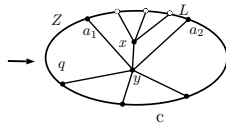
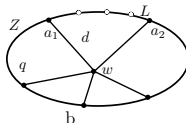
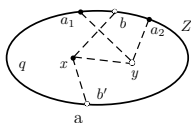


- Наконец, пусть  $G$  двусвязен, но имеет разделяющее множество  $S = \{a, b\}$ . Тогда  $G = G_1 \cup G_2$ , где  $V(G_1) \cap V(G_2) = S$ . Пусть  $G'_i = G_i + ab$ .
  - Предположим, что  $G'_1$  содержит подграф  $H$  — подразбиение графа  $K_5$  или  $K_{3,3}$ . Так как  $H$  не может быть подграфом  $G$ ,  $ab \in E(H) \setminus E(G)$ .
  - Однако,  $G$  содержит  $ab$ -путь  $P$  по вершинам  $G_2$ . Заменяя в  $H$  ребро  $ab$  на путь  $P$ , мы получим подразбиение  $H'$  графа  $H$ , являющееся подграфом  $G$ . Тогда  $G$  содержит подразбиение  $K_5$  или  $K_{3,3}$ , что не так.
  - Таким образом,  $G'_1$  не содержит подразбиений  $K_5$  и  $K_{3,3}$ , а значит,  $G'_1$  планарен. Аналогично,  $G'_2$  планарен.
  - Тогда можно изобразить эти графы на плоскости так, чтобы ребро  $ab$  в обоих изображениях лежало в границах внешних граней и склеить эти изображения (см. рис. б).
- Противоречие. □



- Вернемся к доказательству теоремы.
- Очевидно,  $G \neq K_4$ . По Теореме 4.7 существует такое ребро  $w \in E(G)$ , что граф  $G \cdot w$  трёхсвязен, пусть  $w = x \cdot y$ .
- По Лемме 7 мы имеем  $G \cdot w \not\cong K_5$ ,  $G \cdot w \not\cong K_{3,3}$ , следовательно, граф  $G \cdot w$  планарен.
- Пусть  $G' = G \cdot w - w \cong G - x - y$  (изоморфность этих двух графов очевидна).
- Рассмотрим плоское изображение графа  $G'$ , получающееся из изображения  $G \cdot w$  удалением вершины  $w$ , пусть  $q$  — грань  $G'$ , на которой расположена вершина  $w$ .
- Граф  $G'$  двусвязен, поэтому граница грани  $q$  — это простой цикл  $Z$ .
- Отметим на  $Z$  вершины, смежные с  $y$  (обозначим их множество через  $A$ ) и пронумеруем их в циклическом порядке:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Из трёхсвязности  $G$  следует, что  $n \geq 2$ . Пусть  $B$  — множество вершин цикла  $Z$ , смежных с  $x$ .
- Если  $A = B$  то  $n \geq 3$  (так как граф  $G - A$  в этом случае несвязен), тогда  $G$  содержит подразбиение  $K_5$  с главными вершинами  $x, y, a_1, a_2, a_3$ , противоречие.
- Далее НУО  $B \not\subseteq A$  пусть вершина  $b \in B \setminus A$  лежит на дуге  $L = a_1 z a_2$ , не содержащей других вершин из  $A$ .

- Предположим, что вершина  $b' \in B$  не лежит на  $L$  (возможно,  $b'$  совпадает с одной из вершин множества  $A$ , но  $b' \notin \{a_1, a_2\}$ ).
- Тогда циклический порядок вершин  $a_1, b, a_2, b'$  на  $Z$  именно такой, а значит,  $G$  содержит подразбиение  $K_{3,3}$  с главными вершинами  $x, a_1, a_2$  (одна доля) и  $y, b, b'$  (вторая доля), противоречие (см. рис. а).



- Остается случай, когда все вершины множества  $B$  лежат на дуге  $L$  (возможно, совпадают с  $a_1$  или  $a_2$ ).
- В этом случае рассмотрим исходное плоское изображение графа  $G \cdot xy$  и удалим с него все ребра от  $w$  до вершин из  $B \setminus A$  (см. рис. b).
- Ребра от  $A$  до  $w$  делят грань  $q$  на  $n$  граней, одна из них — грань  $d$ , ограниченная  $L$  и ребрами  $wa_1, wa_2$ .
- Мы можем изобразить внутри  $d$  вершину  $x$  и соединить ее ребрами с  $w$  и вершинами из  $B$ , не нарушая планарности (см. рис. c). Для построения плоского изображения  $G$  остается только переименовать  $w$  в  $y$ .

## Триангуляции

### Определение

- 1) Будем называть грань *треугольником*, если ее граница — это треугольник.
  - 2) Плоский граф называется *триангуляцией*, если каждая его грань — треугольник. Кратные рёбра и петли запрещены.
  - 3) *Триангулировать* плоский граф значит провести в нём дополнительные рёбра так, чтобы получилась триангуляция.
- По Лемме 5 триангуляция — двусвязный граф.

### Лемма 8

*Пусть  $G$  — плоский граф без петель,  $v(G) \geq 3$ , никакие два кратных ребра не обрауют грань. Тогда  $G$  можно триангулировать без появления новых пар кратных ребер.*

**Доказательство.** • Пусть  $G$  — не триангуляция. Тогда  $G$  имеет грань  $d$ , не являющуюся треугольником. Пусть  $H = G(V_d)$ .

- По Лемме 1 любые две вершины из  $V_d$  можно соединить ломаной в  $d$ , эта ломаная не будет пересекать ребер графа  $G$ .
- Значит, если граф  $H$  неполный, то мы можем добавить в него ребро без образования новых пар кратных ребер.



## Лемма 9

В любой триангуляции  $T$  с  $v(T) \geq 4$  есть ребро  $e$ , входящее ровно в два треугольника — в две грани, граничащие по  $e$ .

**Доказательство.** • Любое ребро  $f \in E(T)$  входит в две грани, и эти грани граничат только по  $f$  (иначе в  $T$  есть пара кратных рёбер). Значит, нам достаточно найти ребро  $e$ , не входящее в *разделяющий* треугольник — такой, что в обеих частях плоскости относительно него есть вершины графа.

- Если в  $T$  нет разделяющего треугольника, то утверждение очевидно — нам подойдет любое ребро.
- Предположим, что разделяющие треугольники есть и рассмотрим такой разделяющий треугольник  $abc$ , что внутри него нет других разделяющих треугольников.
- Однако внутри  $abc$  есть вершины  $a$  значит, есть и ребро  $e$ . Тогда ребро  $e$  не может входит в разделяющий треугольник, так как такой треугольник содержался бы внутри  $abc$ , что противоречит выбору  $abc$ .

## Изображение с прямыми рёбрами

### Теорема 5

(К. Wagner, 1936.) Пусть  $G$  — планарный граф без кратных рёбер. Тогда существует плоское изображение  $G$ , в котором все рёбра — отрезки.

**Доказательство.** • Будем доказывать утверждение индукцией по количеству вершин графа, база для графа на одной вершине очевидна.

• Достаточно доказать теорему для случая, когда  $G$  — триангуляция, так как по Лемме 8 любой граф можно триангулировать без появления кратных рёбер. Будем доказывать, что можно выпрямить триангуляцию, тогда будет выпрямлен и исходный граф.

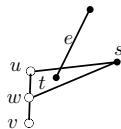
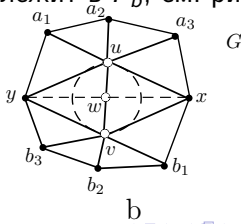
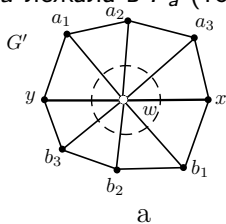
• По Лемме 9 выберем ребро  $e = uv \in E(G)$  так, чтобы оно входило ровно в два треугольника — грани  $xiv$  и  $uiv$ .

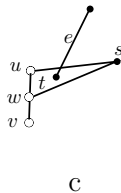
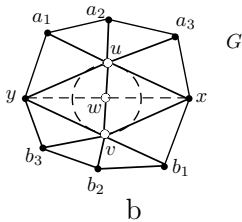
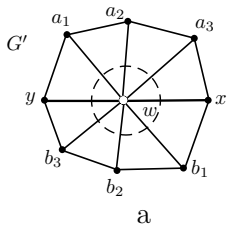
• Тогда  $G' = G \cdot uv$  — триангуляция с плоским изображением, в котором “сжаты” грани  $xiv$  и  $uiv$ , а остальные грани — такие же, как в  $G$ . Кратных рёбер в  $G'$  нет.

• По индукционному предположению, существует изображение  $G'$  с прямыми рёбрами. Далее рассматриваем его.



- Найдем минимум расстояний между вершинами в  $G'$ , а также минимум расстояний от вершин до не инцидентных им рёбер (напомним, что рёбра — это отрезки). Пусть  $d$  — наименьший из этих минимумов. Очевидно,  $d > 0$ .
- Проведем окружность  $S$  радиуса  $\delta = \frac{d}{2}$  с центром  $w$ . Понятно, что внутри  $S$  вершин графа  $G'$  нет и пересекают эту окружность только рёбра с концом в  $w$ .
- Ломаная  $xw$  делит многоугольник  $P = ya_1 \dots a_k x b_1 \dots b_m$  на два многоугольника:  $P_a$ , содержащий  $a_1, \dots, a_k$  и  $P_b$ , содержащий  $b_1, \dots, b_m$ .
- Проведем диаметр  $uv$  окружности  $S$  так, чтобы  $x$  и  $y$  лежали по разную сторону от соответствующей прямой и  $u$  лежала в  $P_a$  (тогда  $v$  лежит в  $P_b$ , см. рис. b).





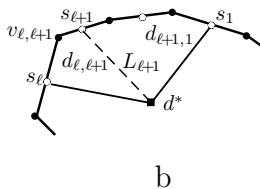
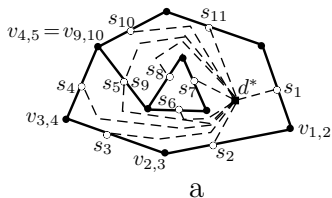
- Удалим все рёбра, инцидентные  $w$ , из графа. Теперь проведем отрезки от  $u$  до  $x, y, a_1, \dots, a_k$  и от  $v$  до  $x, y, b_1, \dots, b_m$  (см. рис. b). Очевидно, никакие два проведенных отрезка не пересекают друг друга.
- Остается доказать, что проведенные отрезки не пересекают других рёбер графа  $G$ .
- Пусть, скажем, ребро  $us$  пересекает какое-то другое ребро  $e$  (см. рис. c). Стороны  $sw$  и  $wi$  треугольника  $swi$  не могут пересекать  $e$ . Следовательно, один из концов  $e$  — назовем его  $t$  — лежит в треугольнике  $swi$ . Но тогда  $t$  лежит в иреугольнике  $swi$  и расстояние от  $t$  до отрезка  $sw$ , очевидно, меньше  $|uw| = \frac{d}{2}$ , противоречие.



## Лемма 10

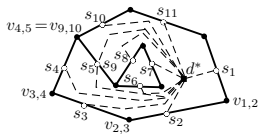
Пусть  $G$  — связный плоский граф,  $d \in F(G)$ , Пусть  $k = b(d)$ , а  $e_1 \dots e_k$  — рёбра из  $E_d$  в порядке циклического обхода  $Z(d)$  (нумерация — циклическая по модулю  $k$ , внутренние рёбра грани  $d$  встречаются в этой нумерации дважды).

Отметим точку  $d^*$  на грани  $d$  и по точке  $s_i$  на каждом ребре  $e_i$ . Тогда в грани  $d$  можно провести ломаные  $L_1, \dots, L_k$  без общих внутренних точек, соединяющие  $d^*$  с  $s_1, \dots, s_k$  соответственно. При этом, циклический порядок выходов ломаных в точке  $d^*$  будет  $L_1, \dots, L_k$  (см. рис. а).

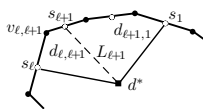


**Доказательство.** Рассмотрим отдельно от всего графа грань  $d$  и добавим вершины  $s_1, \dots, s_k, d^*$ .

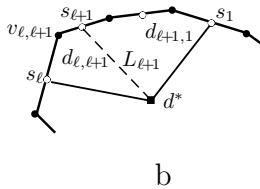
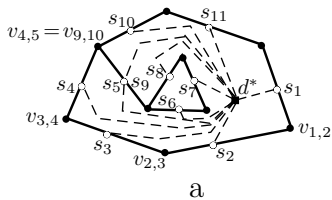
- Внутреннюю точку  $d^*$  грани  $d$  можно соединить ломаной  $L_1$  в грани  $d$  с точкой  $s_1$  на границе грани. Далее пусть  $k \geq 2$ .
- Так как добавленное ребро  $L_1 = d^*s_1$  — мост, это внутреннее ребро полученной грани  $d_0$ , в границу которой добавилась вершина  $d^*$ .
- Пусть  $v_{i,i+1}$  — вершина, в которой обход  $Z(d)$  переходит с ребра  $e_i$  на ребро  $e_{i+1}$ .
- Докажем индукцией по  $2 \leq \ell \leq k$ , что можно провести в грани  $d$  описанные выше ломаные  $L_1, L_2, \dots, L_\ell$  так, что грань  $d$  будет разбита на грани  $d_{1,2}, \dots, d_{\ell,1}$ , причем границу  $d_{i,i+1}$  образуют ломаные  $L_i$  и  $L_{i+1}$ , а также участок циклического обхода  $Z(d)$  между  $s_i$  и  $s_{i+1}$ , содержащий  $v_{i,i+1}$ . Границу грани  $d_{\ell,1}$  образуют ломаные  $L_\ell$  и  $L_1$ , а также участок циклического обхода  $Z(d)$  между  $s_\ell$  и  $s_1$ , содержащий  $v_{\ell,\ell+1}$ .



a



b



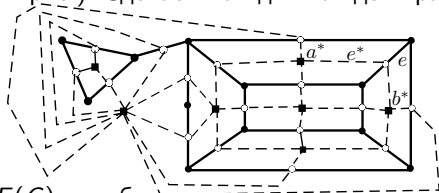
**База** для  $\ell = 2$  очевидна — в грани  $d_0$  можно провести ломаную  $L_2$ , соединяющую граничные точки  $d^*$  и  $s_2$ . В результате ломаная  $L_2 L_1$  разобьет  $d$  на две части  $d_{1,2}$  и  $d_{2,1}$ , очевидно, обладающие нужными свойствами.

**Переход**  $\ell \rightarrow \ell + 1$ . Рассмотрим грань  $d_{\ell,1}$ . На ее границе лежат точки  $d^*$  и  $s_{\ell+1}$ , которые можно соединить в грани  $d_{\ell,1}$  ломаной  $L_{\ell+1}$  (см. рис. b). В результате грань  $d_{\ell,1}$  будет разбита этой ломаной на две грани  $d_{\ell,\ell+1}$  и  $d_{\ell+1,1}$  с нужными свойствами.  $\square$

## Двойственный граф

- Пусть  $G$  — связный плоский граф. Вершины *двойственного графа*  $G^*$  будут соответствовать граням графа  $G$ : внутри каждой грани  $a$  графа  $G$  мы отметим соответствующую ей вершину  $a^*$  графа  $G^*$ . Будем говорить, что вершина  $a^*$  *двойственна* грани  $a$ .

- Зафиксируем на каждом ребре графа  $G$  по точке, которую назовём *серединой* этого ребра. Точку  $a^*$  можно соединить внутри грани  $a$  непересекающимися ломаными с серединами всех входящих в границу грани  $a$  рёбер, как описано в Лемме 10 (см. рис.). Сделаем так для каждой грани графа  $G$ .



- Пусть  $e \in E(G)$  — ребро, по которому граничат две грани  $a$  и  $b$  графа  $G$  (возможно,  $a = b$ ). Ему будет соответствовать ребро  $e^*$  двойственного графа  $G^*$ , соединяющее двойственные граням  $a$  и  $b$  вершины  $a^*$  и  $b^*$  и проходящее через середину ребра  $e$ . Назовём ребро  $e^*$  *двойственным* к  $e$ .

- Если грани  $a$  и  $b$  совпадают (или, что равносильно, ребро  $e$  — мост), то  $e^*$  — петля.
  - Вершины  $a^*, b^* \in V(G^*)$  оказываются соединены таким количеством рёбер, сколько общих рёбер имеют границы граней  $a$  и  $b$ .
  - Таким образом, существует естественная биекция между рёбрами  $G$  и рёбрами  $G^*$  (каждому ребру графа  $G$  ставится в соответствие двойственное). Следовательно,  $e(G) = e(G^*)$ .
  - Граф  $G^*$  зависит не только от графа  $G$ , но и от изображения этого графа на плоскости, потому мы определяем  $G^*$  для плоского графа  $G$ . Для разных плоских изображений одного планарного графа могут получиться неизоморфные двойственные графы.
  - Двойственный граф не зависит ни от того, какие точки мы выберем внутри граней исходного графа  $G$ , ни от того, какие точки мы назовем серединами рёбер.
- Нетрудно доказать, что получатся изоморфные плоские графы.

• Итак, вершины графа  $G^*$  соответствуют граням графа  $G$ , а рёбра графа  $G^*$  соответствуют рёбрам графа  $G$ . Чему в  $G$  соответствуют грани  $G^*$ ?

## Лемма 11

*Пусть  $G$  — связный плоский граф. Тогда существует биекция между  $V(G)$  и  $F(G^*)$ , которая ставит в соответствии каждой вершине  $a \in V(G)$  грань  $a^* \in F(G^*)$ , содержащую  $a$ .*

**Доказательство.** • Рассмотрим грань  $a^* \in F(G^*)$  и докажем, что на ней изображена хотя бы одна вершина графа  $G$ .

• Рассмотрим ребро  $e^* \in E_{a^*}$ . По построению оно пересекает ребро  $e$  графа  $G$ . Следовательно, часть изображения ребра  $e$  лежит в грани  $a^*$ . По построению  $e$  пересекает ровно одно ребро графа  $G^*$  и ровно один раз, следовательно, хотя бы один конец  $e$  ( $a$  это вершина графа  $G$ ) лежит в  $a^*$ .

• Нам известно, что  $f(G) = v(G^*)$ ,  $e(G) = e(G^*)$ . По формуле Эйлера,  $v(G) + f(G) - e(G) = 2 = v(G^*) + f(G^*) - e(G^*)$ , откуда следует, что  $f(G^*) = v(G)$ .

• Значит, на каждой грани  $a^*$  плоского графа  $G^*$  лежит ровно одна вершина графа  $G$ , которую мы и обозначим через  $a$ .  $\square$

В обозначениях Леммы 11 мы будем говорить, что вершина  $a \in V(G)$  и грань  $a^* \in F(G^*)$  **двойственны** друг другу.

## Лемма 12

Пусть  $G$  — связный плоский граф. Тогда  $(G^*)^* \simeq G$ .

**Доказательство.** • Отметим на каждой грани  $a^* \in F(G^*)$  двойственную ей вершину  $a \in V(G)$  (это можно сделать по Лемме 11). На каждом ребре  $e^* \in E(G^*)$  отметим в качестве середины как раз ту точку, что была использована при построении  $G^*$ .

- После этого от каждой вершин графа  $G$  проведем “половинки” инцидентных ей ребер из  $E(G)$ , как раз до их середин. В результате будут в точности проведены ребра графа  $G$ , как на исходном изображении. Получится граф  $G$ .
- Итак, на каждой грани  $a^* \in F(G^*)$  отмечена ровно одна вершина, которая соединена с некоторыми серединами ребер из  $E(G^*)$  непересекающимися ломаными так, что для каждого ребра  $e^* \in E(G^*)$  проведено двойственное ребро  $e \in E(G)$ .
- Следовательно, от точки  $a$  на грани  $a^* \in G^*$  проведены ломаные до всех середин ребер из  $B(a^*)$ , причем до граничных ребер — с одной, а до внутренних — с обеих сторон. Таким образом, построенный граф  $G$  — это двойственный граф  $(G^*)^*$ .
- Так как построение двойственного графа не зависит от выбора точек на гранях и серединах ребер,  $(G^*)^* \simeq G$ .

## Раскраски карт

- **Карта** — связный плоский граф без мостов. Его грани иногда называют *странами*.
- Раскраска граней плоского графа  $G$  называется *правильной*, если две грани, имеющие общее ребро, покрашены в разные цвета.
- Для плоского графа  $G$  мы будем обозначать через  $\chi^*(G)$  минимальное количество цветов, для которого существует правильная раскраска граней графа  $G$ .
- Нетрудно понять, что правильные раскраски граней плоского графа  $G$  взаимно однозначно соответствуют правильным раскраскам вершин двойственного графа  $G^*$ . Поэтому  $\chi^*(G) = \chi(G^*)$  и  $\chi(G) = \chi^*(G^*)$ .
- **Гипотеза четырёх красок. (F. Guthrie, 1852.)**  
Страны любой карты можно правильным образом покрасить в 4 цвета.
- 4CC эквивалентна следующему утверждению:  $\chi(G) \leq 4$  для любого планарного графа  $G$  без петель.

## Теорема о 5 красках

### Теорема 6

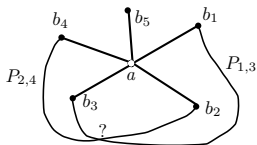
(Ф. Кетре, 1879.) Для любого планарного графа  $G$  без петель  $\chi(G) \leq 5$ .

**Доказательство.** • Индукция по  $v(G)$ , база для случая  $v(G) \leq 5$  очевидна. По Следствию 2 граф  $G$  имеет вершину  $a$  степени не более 5.

• Граф  $G - a$  также планарен и по индукционному предположению мы знаем, что  $\chi(G - a) \leq 5$ . Пусть  $\rho$  — правильная раскраска вершин  $G - a$  в 5 цветов.

• Если вершины из  $N_G(a)$  покрашены не более чем в 4 цвета, мы можем докрасить вершину  $a$  и получить правильную раскраску вершин  $G$ .

• Остается случай, когда  $\rho$  красит  $N_G(a)$  в 5 цветов. Тогда  $d_G(a) = 5$ , пусть  $N_G(a) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ , причем соседи упорядочены по выходу рёбер из  $a$  (по часовой стрелке). Не умаляя общности, можно считать, что  $\rho(b_i) = i$  для всех  $i \in [1..5]$ .



- Пусть  $G_{1,3}$  — индуцированный подграф  $G$  —  $a$  на вершинах цветов 1 и 3, а  $U$  — его компонента связности, содержащая  $b_1$ . Если во всех вершинах  $U$  поменять местами цвета 1 и 3, раскраска останется правильной, а  $b_1$  будет покрашена в цвет 3.
- Если в новой раскраске невозможно докрасить вершину  $a$ , в ее окрестности должен остаться цвет 1 — но в него может быть покрашена только вершина  $b_3$  и только в случае  $b_3 \in U$ .
- Значит, достаточно рассмотреть случай, когда вершины  $b_1$  и  $b_3$  соединены путём  $P_{1,3}$  по вершинам цветов 1 и 3 (см. рисунок).
- Аналогично, достаточно рассмотреть случай, когда вершины  $b_2$  и  $b_4$  соединены путём  $P_{2,4}$  по вершинам цветов 2 и 4. Тогда пути  $P_{1,3}$  и  $P_{2,4}$  должны пересекаться, что, очевидно, невозможно.



- В 1880 году Тэйт опубликовал свой подход к доказательству 4СС. Доказательство оказалось неверным, но теорема об эквивалентной переформулировке 4СС оказалась очень полезной: в последующих работах авторы доказывали не собственно 4СС, а эквивалентную переформулировку о рёберных раскрасках триангуляции.

## Определение

Пусть  $T$  — триангуляция. Назовём *Тэйтовой раскраской* триангуляции  $T$  такую раскраску рёбер  $T$  в три цвета, что все рёбра каждой грани разноцветны.

- Далее рассматриваются графы без петель, иначе вопросы о правильной раскраске вершин бессмысленны.

## Теорема 7

**(P. G. Tait, 1880.)** Четыре утверждения равносильны.

1° Для любого плоского графа  $G$  выполняется  $\chi(G) \leq 4$ .

2° Для любого рёберно двусвязного плоского графа  $G$  выполняется  $\chi^*(G) \leq 4$ .

3° Для любого рёберно двусвязного плоского кубического графа  $G$  выполняется  $\chi'(G) = 3$ .

4° Для любой триангуляции  $T$  существует Тэйтова раскраска.

**Доказательство.**  $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ . Рёберно двусвязный граф  $G$  не имеет мостов, следовательно, его двойственный граф  $G^*$  не имеет петель. Тогда  $\chi^*(G) = \chi(G^*) \leq 4$ .

$3^\circ \Rightarrow 4^\circ$ . Очевидно, двойственный граф  $T^*$  триангуляции  $T$  является рёберно двусвязным кубическим графом, а правильная раскраска его рёбер в 3 цвета — Тэйтовой раскраской рёбер  $T$ .

$4^\circ \Rightarrow 3^\circ$ . Пусть  $G$  — кубический рёберно двусвязный плоский граф. Очевидно, двойственный граф  $G^*$  — триангуляция, а Тэйтова раскраска триангуляции  $G^*$  является правильной раскраской рёбер  $G$  в три цвета.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ . • Пусть  $G$  — плоский рёберно двусвязный кубический граф. У него есть правильная раскраска  $\rho^*$  граней в 4 цвета. Поскольку всё равно, как нумеровать цвета, мы будем считать, что  $\rho^*$  принимает значения из  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ .

• Так как  $G$  — рёберно двусвязный граф, каждое ребро  $e \in E(G)$  разделяет две разные грани  $a$  и  $b$ . Мы положим  $\rho'(e) = \rho^*(a) + \rho^*(b)$ . Так как  $a \neq b$ , то  $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$ , следовательно,  $\rho'(e) \neq (0, 0)$ . Таким образом,  $\rho'$  — раскраска рёбер графа  $G$  в три цвета.

• Докажем, что раскраска  $\rho'$  — правильная. Пусть  $v$  — вершина графа  $G$ , а  $a, b, c$  — три содержащие её грани. Как уже отмечалось, все эти грани различны, любые две из них имеют общее ребро.

• Следовательно,  $\rho^*(a)$ ,  $\rho^*(b)$  и  $\rho^*(c)$  — три разных цвета, откуда следует, что три цвета инцидентных вершине  $v$  рёбер  $\rho^*(a) + \rho^*(b)$ ,  $\rho^*(a) + \rho^*(c)$ ,  $\rho^*(b) + \rho^*(c)$  также различны.

• Таким образом,  $\rho'$  — правильная раскраска рёбер  $G$  в 3 цвета.

• Следовательно,  $\chi'(G) = 3$  (так как очевидно, что  $\chi'(G) \geq 3$ ).

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ . • Достаточно рассмотреть связный граф  $G$  с  $v(G) \geq 3$ . По Лемме 6 граф  $G$  является подграфом триангуляции  $H$ .

• Рассмотрим рёберно двусвязный кубический граф  $H^*$ . Существует правильная раскраска  $\rho'$  рёбер этого графа в 3 цвета.

• Пусть  $H_{i,j}^*$  — подграф  $H^*$  на рёбрах цветов  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  в раскраске  $\rho'$ . Тогда  $d_{H_{i,j}^*}(v) = 2$  для любой вершины  $v \in V(H^*)$ , следовательно,  $H_{i,j}^*$  — объединение нескольких циклов.

• Легко видеть, что существует правильная раскраска  $\rho_{i,j}^*$  граней графа  $H_{i,j}^*$  в два цвета.

• Рассмотрим произвольную грань  $a$  графа  $H^*$ .

Пусть  $a_{12}$  — грань  $H_{12}^*$ , частью которой является  $a$ ,  
а  $a_{13}$  — грань  $H_{13}^*$ , частью которой является  $a$  (понятно, что  $a_{12}$  и  $a_{13}$  определены однозначно).

• Положим  $\rho^*(a) = (\rho_{1,2}^*(a_{1,2}), \rho_{1,3}^*(a_{1,3}))$ .

• Мы получили раскраску граней графа  $H^*$  в четыре цвета.

- Покажем, что раскраска  $\rho^*$  является правильной.
- Рассмотрим имеющие общее ребро  $e$  грани  $a$  и  $b$  графа  $H^*$ , пусть  $a = a_{1,2} \cap a_{1,3}$ ,  $b = b_{1,2} \cap b_{1,3}$  — определённые выше представления в виде пересечений граней.
- Если  $\rho'(e) \in \{1, 2\}$ , то  $a_{1,2} \neq b_{1,2}$ , причём эти грани графа  $H_{1,2}^*$  граничат по ребру  $e$ , следовательно,  $\rho_{1,2}^*(a_{1,2}) \neq \rho_{1,2}^*(b_{1,2})$ , а тогда и  $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$ .
- Если  $\rho'(e) = 3$ , то аналогично  $\rho_{1,3}^*(a_{1,3}) \neq \rho_{1,3}^*(b_{1,3})$  и  $\rho^*(a) \neq \rho^*(b)$ .
- Таким образом,  $\chi(G) \leq \chi(H) = \chi^*(H^*) \leq 4$ , что и требовалось доказать. □