Линейные рекуррентные соотношения

2026

Определение

Пусть K — поле, $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$, причем $a_0 \neq 0$. Будем говорить, что последовательность $\{x_k\}$ удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению порядка n, если для любого $k \geq 0$ выполнено

$$x_{n+k} = a_{n-1}x_{n+k-1} + a_{n-2}x_{n+k-2} + \dots + a_0 x_k. \qquad (*)$$

- Зафиксируем $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ и обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех последовательностей, удовлетворяющих соотношению $(*)$.
- Для $X = \{x_k\} \in \mathcal{L}$ и $\lambda \in K$ определим последовательность $\lambda X := \{\lambda x_k\}$.
- Для $X = \{x_k\} \in \mathcal{L}$ и $Y = \{y_k\} \in \mathcal{L}$ определим последовательность $X + Y := \{x_k + y_k\}$.
- Отметим два очевидных свойства.

Свойство 1

Если $X = \{x_k\} \in \mathcal{L}$ и $\lambda \in K$, то $\lambda X \in \mathcal{L}$.

Свойство 2

Если $X = \{x_k\} \in \mathcal{L}$ и $Y = \{y_k\} \in \mathcal{L}$, то $X + Y \in \mathcal{L}$.

Лемма 1

Множество $\mathcal{L}$ с введенными выше сложением и умножением на число — линейное пространство над полем K.

Доказательство. • Так как сложение и умножение определены отдельно для каждого члена последовательности, ассоциативность и коммутативность сложения, ассоциаивность умножения и обе дистрибутивности наследуются из свойств поля K.

• Очевидно, $\mathcal{L}$ содержит последовательность из 0, которая и есть 0-вектор.

• Для $X \in \mathcal{L}$ последовательность $(-1) \cdot X \in \mathcal{L}$ будет обратным элементом по $+$.

• Умножение последовательности на 1 не меняет ее.

• Таким образом, $\mathcal{L}$ — линейное пространство над K. $\square$

• Определим отображение $f : \mathcal{L} \to K^n$

$f(\{x_i\}) := (x_0, \ldots, x_{n-1})$.

• Так как первые n членов последовательности из $\mathcal{L}$ могут быть любыми и однозначно задают последовательность, f — биекция.

• Отметим очевидные свойства f.

Свойство 0

Если $f(0) = (0, \ldots, 0) = 0$.

Свойство 1

Если $X = \{x_k\} \in \mathcal{L}$ *и* $\lambda \in K$, *то*
$f(\lambda X) = \lambda(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \lambda \cdot f(x)$.

Свойство 2

Если $X = \{x_k\} \in \mathcal{L}$ *и* $Y = \{y_k\} \in \mathcal{L}$, *то*
$f(X + Y) = (x_0 + y_0, \ldots, x_{n-1} + y_{n-1}) = f(X) + f(Y)$.

Свойство 3

Если $X^1, \ldots, X^S \in \mathcal{L}$ *и* $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in K$, *то*
$f(\alpha_1 X^1 + \cdots + \alpha_s X^s) = \alpha_1 f(X^1) + \cdots + \alpha_s f(X^s)$.

Лемма 2

1) $X^1, \dots, X^s$ *— базис* $\mathcal{L}$*, если и только если* $f(X^1), \dots, f(X^s)$ *— базис* K^n*.*
2) $\dim(\mathcal{L}) = n$*.*

Доказательство. • Для $Y, X^1, \dots, X^s \in \mathcal{L}$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in K$

$$Y = \alpha_1 X^1 + \dots + \alpha_s X^s \iff f(\alpha_1 X^1 + \dots + \alpha_s X^s) = \alpha_1 f(X^1) + \dots + \alpha_s f(X^s) = \alpha_1 (x_0^1, \dots, x_{n-1}^1) + \dots + \alpha_s (x_0^s, \dots, x_{n-1}^s) = (y_0, \dots, y_{n-1}) = f(Y). \qquad (**)$$

1) • Так как f — биекция, $(**)$ означает, что $X^1, \dots, X^s$ — порождающая система векторов в $\mathcal{L}$, если и только если $f(X^1), \dots, f(X^s)$ — порождающая система векторов в K^n.

• Подставив $Y = 0$ в $(**)$, несложно убедиться, что $X^1, \dots, X^s$ — ЛЗ, если и только если $f(X^1), \dots, f(X^s)$ — ЛЗ.

• Следовательно, $X^1, \dots, X^s$ — базис $\mathcal{L}$, если и только если $f(X^1), \dots, f(X^s)$ — базис K^n.

2) Очевидно следует из пункта 1. $\square$

Характеристический многочлен

Определение

Многочлен $\chi(t) := t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \dots - a_1 t - a_0$ называется характеристическим многочленом рекуррентного соотношения $(*)$.

Лемма 3

Пусть λ — корень $\chi(t)$, а $x_i = \lambda^i$ для всех $i \in \mathbb{N}_0$. Тогда $X^\lambda := \{x_i\} \in \mathcal{L}$.

Доказательство. • Проверим, что $x_{n+k} = a_{n-1}x_{n+k-1} + a_{n-2}x_{n+k-2} + \dots + a_0 x_k$.

• Подставим значения членов последовательности:

$$\begin{gathered} x_{n+k} = a_{n-1}x_{n+k-1} + a_{n-2}x_{n+k-2} + \dots + a_0 x_k \iff \\ \lambda^{n+k} = a_{n-1}\lambda^{n+k-1} + a_{n-2}\lambda^{n+k-2} + \dots + a_0\lambda^k \iff \\ \lambda^{n+k} - a_{n-1}\lambda^{n+k-1} - a_{n-2}\lambda^{n+k-2} - \dots - a_0\lambda^k = \\ \lambda^k(\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots - a_0) = \lambda^k \cdot \chi(\lambda) = 0. \end{gathered}$$

Случай, когда характеристический многочлен имеет n различных корней

Теорема 1

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни $\chi(t)$, а $Y = \{y_k\} \in \mathcal{L}$. Тогда существуют и единственны такие $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, что для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ выполнено $y_k = \alpha_1\lambda_1^k + \dots + \alpha_n\lambda_n^k$.

Доказательство. • Достаточно проверить, что последовательности X^{λ_1}, ..., X^{λ_n} — базис $\mathcal{L}$.

• По Лемме 2 это равносильно тому, что $f(X^{\lambda_1}) = (1, \lambda_1, \dots, \lambda_1^{n-1})$, ..., $f(X^{\lambda_n}) = (1, \lambda_n, \dots, \lambda_n^{n-1})$ — базис K^n.

• Это в свою очередь равносильно тому, что вектора $(1, \lambda_1, \dots, \lambda_1^{n-1})$, ..., $(1, \lambda_n, \dots, \lambda_n^{n-1})$ ЛНЗ.

• Последнее хорошо известно: эти вектора — строки невырожденной матрицы, чей определитель — определитель Вандермонда, который отличен от 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ & & \dots & \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j) \ne 0. \qquad \square$$

Простейший пример: числа Фибоначчи. Формула Бине

- Напомним, что последовательность чисел Фибоначчи задана соотношениями $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$.
- Характеристический многочлен $f(t) = t^2 - t - 1$ имеет корни $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
- Значит, $F_k = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$.
- Осталось найти константы α_1 и α_2.
- Подставим $k = 0$: $\quad 0 = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 1$, откуда $\alpha_2 = -\alpha_1$.
- Подставим $k = 1$: $\quad 1 = \alpha_1 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2})$, откуда $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
- Мы получили формулу Бине:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right).$$

Лемма 4

Пусть λ — корень многочлена $\chi(t)$ кратности m, а $s \in \mathbb{N}$, $s < m$. Пусть $f(t) \in K[t]$, $\deg(f) = s$. Положим $x_k^{f,\lambda} := f(k)\lambda^k$. Тогда $X^{f,\lambda} = \{x_k^{f,\lambda}\} \in \mathcal{L}$.

Доказательство. • Индукция по s. База $s = 0$ следует из Леммы 3.

Переход от меньших степеней к s.

• Так как кратность корня λ у $\chi(t)$ более s, то и кратность корня λ у $t^{s+k}\chi(t)$ более s.

• Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}_0$ имеем $(\lambda^{s+k}\chi(\lambda))^{(s)} = 0$.

• Введем обозначение $y^{\underline{s}} := y(y-1)\dots(y-s+1)$ — многочлен степени s от y.

• Из правил дифференцирования многочлена следует, что

$$0 = (\lambda^{s+k}\chi(\lambda))^{(s)} = (\lambda^{n+s+k} - a_{n-1}\lambda^{n+s+k-1} - \dots - a_1\lambda^{s+k+1} - a_0\lambda^{s+k})^{(s)} = (n+s+k)^{\underline{s}}\lambda^{n+k} - a_{n-1}(n+s+k-1)^{\underline{s}}\lambda^{n+k-1} - \dots - a_0(k+s)^{\underline{s}}\lambda^k. \qquad (*)$$

• Из формулы $(*)$ следует, что последовательность $X^{t^{\underline{s}},\lambda} = \{k^{\underline{s}}\lambda^k\} \in \mathcal{L}$.

• Отметим, что $t^{\underline{s}} = t^s - g(t)$, где $\deg(g) < s$.

• По индукционному предположению, $X^{g(t),\lambda} = \{g(k)\lambda^k\} \in \mathcal{L}$.

• Следовательно, и $X^{t^s,\lambda} = X^{t^{\underline{s}},\lambda} + X^{g(t),\lambda} \in \mathcal{L}$.

• Теперь очевидно, что для любого многочлена $f \in K[t]$ степени не более s мы имеем $X^{f,\lambda} \in \mathcal{L}$. $\square$

Теорема 2

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ *— корни* $\chi(t) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_p)^{m_p}$, *а* $Y = \{y_k\} \in \mathcal{L}$. *Тогда существуют и единственны такие* $\alpha_0^1, \dots, \alpha_{m_1-1}^1, \dots, \alpha_0^p, \dots, \alpha_{m_p-1}^p \in K$, *что для каждого* $k \in \mathbb{N}_0$ *выполнено*
$$y_k = (\alpha_0^1 + \dots + \alpha_{m_1-1}^1 k^{m_1-1})\lambda_1^k + \dots + (\alpha_0^p + \dots + \alpha_{m_p-1}^p k^{m_p-1})\lambda_p^k.$$

• Мы этого доказывать не будем, так как не хочется проверять, что соответствующие решения ЛНЗ.

Еще один пример: соотношение порядка 2, где характеристический многочлен имеет кратный корень

- В этом случае характеристический многочлен имеет вид $\chi(t) = (t - \lambda)^2 = t^2 - 2\lambda t + \lambda^2$, где $\lambda \neq 0$.
- Значит, рекуррентное соотношение имеет вид $a_{k+2} = 2\lambda a_{k+1} - \lambda^2 a_k$.
- По Лемме 4 мы знаем, что в $\mathcal{L}$ есть последовательности $X^\lambda = \{\lambda^k\}$ и $X^{t,\lambda} = \{k\lambda^k\}$.
- Легко проверить, что эти последовательности ЛНЗ: по Лемме 2 для этого достаточно заметить, что вектора $(1, \lambda)$ и $(0, \lambda)$ (состоящие из первых двух членов наших последовательностей) ЛНЗ в K^2, что очевидно.
- Значит, любая последовательность $Y \in \mathcal{L}$ представляется в виде $\{(\alpha_0 + \alpha_1 k)\lambda^k\}$, где $\alpha_0, \alpha_1 \in K$.
- Константы α_0, α_1 легко найти по начальным данным y_0 и y_1.