

# Алгебра. Глава 8. Линейные отображения

Д. В. Карпов

2026

- Далее везде  $U$  и  $V$  — линейные пространства над одним и тем же полем  $K$ .

## Определение

1) Отображение  $\varphi : U \rightarrow V$  называется **линейным отображением**, если оно является гомоморфизмом

линейных пространств, то есть,

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \text{ для всех } \alpha, \beta \in K \text{ и } x, y \in U.$$

2) **Ядро** линейного отображения  $\varphi$  — это

$$\ker(\varphi) = \{x \in U : \varphi(x) = 0\}.$$

3) **Образ** линейного отображения  $\varphi$  — это

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \{y \in V : \exists x \in U \varphi(x) = y\}.$$

## Лемма 1

Пусть  $\varphi : U \rightarrow V$  — линейное отображение. Тогда:

- 1)  $\ker(\varphi)$  — линейное подпространство  $U$ ;
- 2)  $\text{Im}(\varphi)$  — линейное подпространство  $V$ .

**Доказательство. 1)** • Достаточно доказать, что  $\ker(\varphi)$  замкнуто по взятию линейной комбинации.

- Пусть  $x, x' \in \ker(\varphi)$  и  $\alpha, \beta \in K$ .
- Тогда  $\varphi(\alpha x + \beta x') = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(x') = 0$ , а значит,  $\alpha x + \beta x' \in \ker(\varphi)$ .

**2)** • Достаточно доказать, что  $\text{Im}(\varphi)$  замкнут по взятию линейной комбинации.

- Пусть  $y, y' \in \text{Im}(\varphi)$  и  $\alpha, \beta \in K$ .
- Тогда существуют такие  $x, x' \in U$ , что  $y = \varphi(x)$  и  $y' = \varphi(x')$ .
- Следовательно,

$$\varphi(\alpha x + \beta x') = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(x') = \alpha y + \beta y',$$

а значит,  $\alpha y + \beta y' \in \text{Im}(\varphi)$ .

## Соответствие линейных отображений и матриц

- Пусть  $U$  и  $V$  — линейные пространства над полем  $K$ , в которых зафиксированы базисы  $u_1, \dots, u_m$  и  $v_1, \dots, v_n$  соответственно.
- Тогда любой  $x \in U$  представляется как столбец  $x = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m = (x_1, \dots, x_m)^T$  (столбец координат в разложении по базису, здесь  $x_1, \dots, x_m \in K$ ).
- Аналогично  $y \in V$  представляется в виде  $y = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n = (y_1, \dots, y_n)^T$ .
- Пусть  $\varphi : U \rightarrow V$  — линейное отображение.
- Подставим в  $\varphi$  базисные вектора пространства  $U$  и разложим результаты по базису  $V$ :

$$\begin{aligned}\varphi(u_1) &= (a_{1,1}, \dots, a_{n,1})^T = A^{(1)}, \dots, \varphi(u_i) = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i})^T = A^{(i)}, \\ &\dots, \varphi(u_m) = (a_{1,m}, \dots, a_{n,m})^T = A^{(m)}.\end{aligned}$$

- Тогда  $A = (A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) \in M_{n,m}(k)$  (матрица с указанными столбцами) — **матрица** отображения  $\varphi$  в фиксированных нами базисах.

- Смысл этой матрицы в том, что если  $x = (x_1, \dots, x_m)^T \in U$  (координаты в базисе  $u_1, \dots, u_m$ ), то  $\varphi(x) = A \cdot (x_1, \dots, x_m)^T = (y_1, \dots, y_n)^T$  — координаты  $\varphi(x)$  в базисе  $v_1, \dots, v_n$ .
- Проверим это:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x_1 u_1 + \dots + x_m u_m) = x_1 \varphi(u_1) + \dots + x_m \varphi(u_m) = \\ &= A^{(1)} x_1 + \dots + A^{(m)} x_m = A \cdot (x_1, \dots, x_m)^T. \end{aligned}$$

- Таким образом, при фиксированных базисах линейное отображение — это просто умножение на матрицу.
- Как правило, оно записывается в виде  $Ax = y$ , где вектора  $x \in U$  и  $y \in V$  — столбцы коэффициентов в разложении по фиксированным нами базисам.

- Наоборот, представим вектора из  $U$  и  $V$  как столбцы координат, пусть  $A \in M_{m,n}(K)$ .
- Несложно понять, что отображение  $\varphi : U \rightarrow V$ , заданное формулой  $\varphi(x) = Ax$ , является линейным и в данных базисах будет иметь как раз матрицу  $A$ .
- Линейность проверяется тривиально, а, подставив  $x = u_i$  — столбец из нулей и одной единицы на  $i$  месте, мы получим, что  $i$  столбец матрицы отображения должен быть как раз  $A^{(i)}$ .
- Таким образом, при фиксации базисов  $U$  и  $V$  существует биекция между линейными отображениями из  $U$  в  $V$  и матрицами из  $M_{m,n}(K)$  (каждому отображению соответствует его матрица).

# Композиция линейных отображений. Связь с умножением матриц

## Теорема 1

Пусть  $U, V, W$  — конечномерные линейные пространства над полем  $K$ , а  $\varphi : U \rightarrow V$  и  $\psi : V \rightarrow W$  — линейные отображения, имеющие в фиксированных базисах пространств матрицы  $A_\varphi$  и  $A_\psi$  соответственно. Тогда композиция  $\psi \cdot \varphi$  имеет в этих же базисах матрицу  $A_\psi \cdot A_\varphi$ .

• Пусть  $\dim U = m$ ,  $\dim(V) = n$ ,  $\dim W = \ell$ . Тогда  $A_\psi \in M_{\ell,n}(K)$  и  $A_\varphi \in M_{n,m}(K)$ , то есть, произведение матриц  $A_\psi \cdot A_\varphi$  определено корректно.

**Доказательство Теоремы 1.** • Все вектора в нашем доказательстве записаны как столбцы координат в соответствующем фиксированном базисе.

• Тогда для  $x \in U$  имеем

$$(\psi \cdot \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(A_\varphi x) = (A_\psi \cdot A_\varphi)x,$$

откуда следует утверждение теоремы.



## Теорема 2

Пусть  $\varphi : U \rightarrow V$  — линейное отображение,  $U$  — конечномерное линейное пространство. Тогда  $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim(U)$ .

**Доказательство.** • Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — базис  $\ker(\varphi)$ .

• Дополним его до базиса  $U$ :  $e_1, \dots, e_k, u_1, \dots, u_m$ .

• Тогда любой вектор  $x \in U$  единственным образом представляется в виде

$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m$ , а значит,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(e_i) + \sum_{i=1}^m \beta_i \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^m \beta_i \varphi(u_i).$$

• Таким образом,  $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)$  — порождающая система векторов в  $\operatorname{Im}(\varphi)$ .

- Докажем, что вектора  $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)$  ЛНЗ.

- Пусть  $\sum_{i=1}^m \beta_i \varphi(u_i) = 0$ .

- Пусть  $x = \sum_{i=1}^m \beta_i u_i$ . Тогда  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i \varphi(u_i) = 0$ .

- Следовательно,  $x \in \ker(\varphi)$ , а значит, вектор  $x$  можно разложить по базису  $\ker(\varphi)$ : пусть  $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$ .

- Таким образом, мы имеем два разложения вектора  $x$  по базису  $e_1, \dots, e_k, u_1, \dots, u_m$  пространства  $U$ :

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^m \beta_i u_i.$$

- Но эти два разложения должны совпадать! Следовательно,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$ .

- Таким образом, вектора  $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)$  ЛНЗ, то есть, это базис  $\text{Im}(\varphi)$ .

- Следовательно,  
 $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi)) = k + m = \dim(U)$ .



### Теорема 3

Пусть  $U, V$  — конечномерные линейные пространства над полем  $K$ , в которых фиксированы базисы, а  $\varphi : U \rightarrow V$  — линейное отображение с матрицей  $A$ . Тогда  $\dim(\text{Im}(\varphi)) = \text{rk}(A)$ .

**Доказательство.** • Как обычно, пусть  $\dim(U) = m$ , а  $u_1, \dots, u_m$  — базис  $U$ . Тогда

$$\text{rk}(A) = \dim(\text{Lin}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})) = \dim(\text{Lin}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m))).$$

• А теперь заметим, что

$$\begin{aligned} \text{Lin}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_m)) &= \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi(u_i) : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K \right\} = \\ &= \left\{ \varphi\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i\right) : \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K \right\} = \{\varphi(x) : x \in U\} = \text{Im}(\varphi), \end{aligned}$$

так как  $U$  — множество всевозможных линейных комбинаций векторов своего базиса. □

- Непосредственно из Теорем 2 и 3 можно сделать следующее заключение.

### Следствие 1

Пусть  $U, V$  — конечномерные линейные пространства над полем  $K$ , в которых фиксированы базисы,  $\dim(U) = m$ , а  $\varphi : U \rightarrow V$  — линейное отображение с матрицей  $A$ . Тогда  $\dim(\ker(\varphi)) = m - \text{rk}(A)$ .

- Покажем, как применять соответствие матриц и линейных отображений для доказательства утверждения “чисто про матрицы”.

### Определение

Пусть  $\varphi : U \rightarrow V$  — линейное отображение, а  $W$  — линейное подпространство  $U$ . Тогда  $\varphi|_W : W \rightarrow V$  — **сужение**  $\varphi$  на подпространство  $W$  (то же самое отображение, применяемое только для элементов  $W$ ).

- Очевидно,  $\varphi|_W$  — линейное отображение и  $\text{Im}(\varphi|_W) \subset \text{Im}(\varphi)$ .

## Теорема 4

Пусть  $A \in M_{m,n}(K)$ ,  $B \in M_{n,\ell}(K)$ . Тогда  $\text{rk}(AB) \leq \min(\text{rk}(A), \text{rk}(B))$ .

**Доказательство.** • Рассмотрим линейные отображения  $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ , заданное формулой  $\varphi(x) = Ax$  и линейное отображения  $\psi : K^\ell \rightarrow K^n$ , заданное формулой  $\psi(y) = By$ .

- Как мы знаем, эти отображения имеют в стандартных базисах пространств матрицы  $A$  и  $B$  соответственно.
- По Теореме 1 композиция  $\varphi \cdot \psi : K^\ell \rightarrow K^m$  — линейное отображение с матрицей  $AB$ .
- По Теореме 3 мы имеем

$$\text{rk}(B) = \dim(\text{Im}(\psi)), \quad \text{rk}(A) = \dim(\text{Im}(\varphi)) \quad \text{и}$$
$$\text{rk}(AB) = \dim(\text{Im}(\varphi \cdot \psi)).$$

- Нам достаточно доказать два неравенства:  $\text{rk}(AB) \leq \text{rk}(A)$  и  $\text{rk}(AB) \leq \text{rk}(B)$ .

## Утверждение 1

$$\text{rk}(AB) \leq \text{rk}(A).$$

**Доказательство.** • Отметим, что  $\varphi \cdot \psi = \varphi|_{\text{Im}(\psi)}$ .

• Поэтому,  $\text{Im}(\varphi \cdot \psi) \subset \text{Im}(\varphi)$ , а значит, и  $\dim(\text{Im}(\varphi \cdot \psi)) \leq \dim(\text{Im}(\varphi))$ . □

## Утверждение 2

$$\text{rk}(AB) \leq \text{rk}(B).$$

**Доказательство.** • Так как  $\varphi \cdot \psi = \varphi|_{\text{Im}(\psi)} : \text{Im}(\psi) \rightarrow K^m$ , мы по Теореме 2 имеем

$$\dim(\text{Im}(\varphi \cdot \psi)) + \dim(\ker(\varphi \cdot \psi)) = \dim(\text{Im}(\psi)), \quad \text{откуда}$$

$$\text{rk}(AB) = \dim(\text{Im}(\varphi \cdot \psi)) \leq \dim(\text{Im}(\psi)) = \text{rk}(B). \quad \square$$

• Теорема 4 доказана. □

## Кольцо линейных операторов $\text{End}(V)$ , связь с кольцом матриц

### Определение

Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ . Тогда  $\text{End}(V)$  — множество всех линейных отображений из  $V$  в себя, которые мы будем называть *линейными операторами* на  $V$ .

- В  $\text{End}(V)$  мы определим сложение (поэлементное:  $(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x)$ ) и умножение — композицию.
- Пусть  $\dim(V) = n$ . Зафиксируем базис  $V$ , каждому линейному оператору  $\varphi \in \text{End}(V)$ , как мы знаем, соответствует матрица  $A_\varphi \in M_n(K)$  в этом базисе.
- Далее мы не будем говорить про базис, все матрицы в этом разделе именно в нем.

- Опишем несколько свойств биекции оператор — матрица. Первые два свойства очевидны.

### Свойство 1

Пусть  $\varphi \in \text{End}(V)$  и  $k \in K$ . Тогда  $k\varphi \in \text{End}(V)$  (это отображение, заданное формулой  $(k\varphi)(x) := k\varphi(x)$ ) и  $A_{k\varphi} = k \cdot A_\varphi$  (все элементы матрицы  $A_\varphi$  умножаются на  $k$ ).

### Свойство 2

Пусть  $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$ . Тогда  $A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi$ .

- Третье свойство следует из Теоремы 1 (о матрице композиции линейных отображений).

### Свойство 3

Пусть  $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$ . Тогда  $A_{\varphi \cdot \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi$ .

## Теорема 5

Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\dim(V) = n$ .  
Тогда  $\text{End}(V)$  — кольцо с единицей, причем  $\text{End}(V) \simeq M_n(K)$ .

**Доказательство.** • Мы знаем, что отображение  $f : \text{End}(V) \rightarrow M_n(k)$ , заданное формулой  $f(\varphi) := A_\varphi$ , является биекцией и согласовано с операциями  $+$  и  $\cdot$  в кольцах.

- Очевидно,  $f^{-1}$  также согласовано с операциями в кольцах.
- Следовательно, все нужные нам свойства сложения (коммутативность, ассоциативность, 0 и обратный элемент) в  $\text{End}(V)$  следуют из аналогичных свойств в  $M_n(k)$ .
- Так, 0 в  $\text{End}(V)$  — это отображение с нулевой матрицей, которое отображает все элементы  $V$  в 0, а  $-\varphi$  задается в каждой точке формулой  $(-\varphi)(x) := -(\varphi(x))$ .
- Аналогично, дистрибутивность и все нужные нам свойства умножения в  $\text{End}(V)$  следуют из аналогичных свойств в  $M_n(K)$ .
- Отметим, что единицей в  $\text{End}(V)$  будет, как и положено, тождественное отображение  $\text{id}$  с матрицей  $A_{\text{id}} = E_n$ .
- Теперь понятно, что  $f$  — изоморфизм колец  $\text{End}(V)$  и  $M_n(k)$ .

## Обратимые линейные операторы и их свойства

- В этом разделе пусть  $V$  — конечномерное линейное пространство над полем  $K$ , в котором зафиксирован базис.
- Таким образом, каждому линейному оператору  $\varphi \in \text{End}(V)$  соответствует матрица  $A_\varphi \in M_n(K)$  и это соответствие — биекция.

### Определение

Линейный оператор  $\varphi \in \text{End}(V)$  — **обратимый**, если существует  $\varphi^{-1}$  (то есть, если  $\varphi$  — биекция).

### Лемма 2

Пусть  $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$  таковы, что  $A_\psi = (A_\varphi)^{-1}$ . Тогда  $\varphi$  — обратимый и  $\psi = (\varphi)^{-1}$ .

**Доказательство.** • По Теореме 1 оператор  $\varphi \cdot \psi \in \text{End}(V)$  имеет матрицу  $A_{\varphi \cdot \psi} = A_\varphi \cdot A_\psi = E_n$ .

- Следовательно,  $\varphi \cdot \psi = \text{id}$ . Аналогично,  $\psi \cdot \varphi = \text{id}$ .
- Значит,  $\psi = (\varphi)^{-1}$ . □

## Теорема 6

Если  $\varphi \in \text{End}(V)$  — обратимый, то  $\varphi^{-1} \in \text{End}(V)$  и  $A_{\varphi^{-1}} = (A_\varphi)^{-1}$ .

**Доказательство.** • Для доказательства линейности  $\varphi^{-1}$  достаточно проверить, что для любых  $a, b \in K$  и  $x, y \in V$

$$\varphi^{-1}(ax + by) = a\varphi^{-1}(x) + b\varphi^{-1}(y) \quad (*)$$

• Так как  $\varphi$  — биекция, для этого достаточно доказать, что, применив к левой и правой частям (\*) оператор  $\varphi$ , мы получим одно и то же:

$$\varphi(\varphi^{-1}(ax + by)) = ax + by \quad \text{и}$$

$$\varphi(a\varphi^{-1}(x) + b\varphi^{-1}(y)) = a\varphi(\varphi^{-1}(x)) + b\varphi(\varphi^{-1}(y)) = ax + by.$$

• Остается заметить, что  $A_\varphi \cdot A_{\varphi^{-1}} = A_{\varphi \cdot \varphi^{-1}} = A_{\text{id}} = E_n$  и, аналогично,  $A_{\varphi^{-1}} \cdot A_\varphi = E_n$ , откуда следует, что  $A_{\varphi^{-1}} = (A_\varphi)^{-1}$ . □

## Координаты вектора в разных базисах

- Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ , а  $e_1, \dots, e_n$  и  $e'_1, \dots, e'_n$  — два его базиса.
- Каждый вектор  $x \in V$  единственным образом представляется в виде столбцов координат по каждому из базисов — скажем,  $(x_1, \dots, x_n)^T$  и  $(x'_1, \dots, x'_n)^T$ .
- Мы покажем, как из столбца координат вектора по одному базису получить столбец координат по другому базису.
- Разложим базисные векторы второго базиса по первому:

$$e'_1 = c_{1,1}e_1 + c_{2,1}e_2 + \dots + c_{n,1}e_n, \dots,$$

$$e'_j = c_{1,j}e_1 + c_{2,j}e_2 + \dots + c_{n,j}e_n, \dots,$$

$$e'_n = c_{1,n}e_1 + c_{2,n}e_2 + \dots + c_{n,n}e_n.$$

- Напишем цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x &= x'_1 e'_1 + \dots + x'_n e'_n = \\ x'_1 (c_{1,1} e_1 + c_{2,1} e_2 + \dots + c_{n,1} e_n) &+ \dots + x'_n (c_{1,n} e_1 + c_{2,n} e_2 + \dots + c_{n,n} e_n) = \\ (x'_1 c_{1,1} + \dots + x'_n c_{1,n}) e_1 &+ \dots + (x'_1 c_{n,1} + \dots + x'_n c_{n,n}) e_n, \end{aligned}$$

откуда, ввиду единственности разложения по базису, делаем

$$\text{вывод } x_i = (c_{i,1} x'_1 + \dots + c_{i,n} x'_n).$$

• Вспомнив про правила умножения матриц, получаем формулу

$$(x_1, \dots, x_n)^T = C(x'_1, \dots, x'_n)^T, \quad \text{где} \quad C = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}.$$

• Матрица  $C$  называется **матрицей перехода** от базиса  $e'_1, \dots, e'_n$  к базису  $e_1, \dots, e_n$ . Докажем ряд свойств матриц перехода.

### Свойство 1

*Матрица перехода невырождена. Если  $C$  — матрица перехода от базиса  $e'_1, \dots, e'_n$  к базису  $e_1, \dots, e_n$ , то матрица перехода от базиса  $e_1, \dots, e_n$  к базису  $e'_1, \dots, e'_n$  — это  $C^{-1}$ .*

**Доказательство.** • Обозначим матрицу перехода от базиса  $e_1, \dots, e_n$  к базису  $e'_1, \dots, e'_n$  через  $D$ .

• Тогда для любого  $x \in V$  мы можем записать его координаты в этих базисах, как выше и заметить, что

$$(x_1, \dots, x_n)^T = C(x'_1, \dots, x'_n)^T \quad \text{и} \quad (x'_1, \dots, x'_n)^T = D(x_1, \dots, x_n)^T,$$

откуда

$$(x_1, \dots, x_n)^T = C(x'_1, \dots, x'_n)^T = CD(x_1, \dots, x_n)^T \quad \text{и}$$

$$(x'_1, \dots, x'_n)^T = D(x_1, \dots, x_n)^T = DC(x'_1, \dots, x'_n)^T.$$

• Так как это верно для любых столбцов координат,  $DC = CD = E_n$  (умножение на  $CD$  или  $DC$  — это  $\text{id}$ ), откуда следует, что  $D = C^{-1}$ .

## Свойство 2

Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\dim(V) = n$ . Тогда, для любого фиксированного базиса  $e_1, \dots, e_n$ , любая невырожденная матрица  $C \in M_n(K)$  является матрицей перехода от какого-то базиса к  $e_1, \dots, e_n$ .

**Доказательство.** • Рассмотрим базис  $e'_1, \dots, e'_n$ , координаты векторов которого в исходном базисе  $e_1, \dots, e_n$  — столбцы матрицы  $C$  (то есть,  $e'_1 = C^{(1)}, \dots, e'_n = C^{(n)}$ ).

• Эти вектора линейно независимы: так как  $C$  — невырожденная матрица, то

$$\dim(V) = n = \text{rk}(C) = \dim(\text{Lin}(C^{(1)}, \dots, C^{(n)})).$$

• Любые  $n$  ЛНЗ векторов в  $n$ -мерном пространстве  $V$  образуют его базис, в частности,  $e'_1, \dots, e'_n$  — базис  $V$ .

• По построению матрицы перехода понятно, что матрица перехода от базиса  $e'_1, \dots, e'_n$  к базису  $e_1, \dots, e_n$  будет в точности  $C$ .

## Матрицы оператора в разных базисах

- Пусть  $\varphi \in \text{End}(V)$ , где  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\dim(V) = n$ .
- Мы знаем, что при каждом фиксированном базисе оператору  $\varphi$  соответствует его матрица. Как связаны матрицы одного оператора в разных базисах?
- Пусть  $e_1, \dots, e_n$  и  $e'_1, \dots, e'_n$  — два базиса  $V$ , а векторам соответствуют столбцы координат (без штрихов — по первому базису, со штрихами — по второму).
- Пусть  $A$  и  $A'$  — матрицы  $\varphi$  в этих базисах. Тогда равенство  $y = \varphi(x)$  можно переписать в двух видах:

$$(y_1, \dots, y_n)^T = A \cdot (x_1, \dots, x_n)^T \quad \text{и}$$

$$(y'_1, \dots, y'_n)^T = A' \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^T.$$

- Пусть  $C$  — матрица перехода от  $e'_1, \dots, e'_n$  к  $e_1, \dots, e_n$ .
- Тогда  $C^{-1}$  — матрица перехода от  $e_1, \dots, e_n$  к  $e'_1, \dots, e'_n$ .

Поэтому

$$(y'_1, \dots, y'_n)^T = A' \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^T = A' C^{-1} (x_1, \dots, x_n)^T \quad \text{и}$$

$$(y_1, \dots, y_n)^T = C (y'_1, \dots, y'_n)^T = CA' \cdot (x'_1, \dots, x'_n)^T = CA' C^{-1} (x_1, \dots, x_n)^T.$$

- Ввиду единственности матрицы отображения  $\varphi$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$  следует, что  $A = CA' C^{-1}$  и  $A' = C^{-1} A C$ .

## Определение

Матрицы  $A, A' \in M_n(K)$  называются *подобными*, если существует такая невырожденная матрица  $C \in M_n(K)$ , что  $A = CA'C^{-1}$ .

- Несложно понять, что подобие матриц — отношение эквивалентности. Таким образом, все матрицы из  $M_n(K)$  разбиваются на классы эквивалентности, состоящие из попарно подобных матриц.

## Теорема 7

*Пусть  $\varphi \in \text{End}(V)$ , где  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\dim(V) = n$ . Тогда матрицы  $\varphi$  во всех возможных базисах образуют класс попарно подобных матриц из  $M_n(K)$ .*

**Доказательство.** • Зафиксируем базис  $e_1, \dots, e_n$  и матрицу  $A$  отображения  $\varphi$  в этом базисе.

- Уже доказано, что матрицы  $\varphi$  в других базисах подобны  $A$ .
- Рассмотрим произвольную матрицу, подобную  $A$  — скажем,  $C^{-1}AC$ , где  $C \in M_n(K)$  — невырожденная матрица.
- Тогда  $C$  — это матрица перехода от нашего фиксированного базиса к другому, и в этом базисе  $\varphi$  имеет матрицу как раз  $C^{-1}AC$ .

## Многочлен от оператора и от матрицы

- Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\dim(V) = n$ , базис считаем фиксированным.
- Пусть  $\varphi \in \text{End}(V)$ , а  $A \in M_n(K)$  — матрица  $\varphi$ .
- Рассмотрим многочлен  $f(t) \in K[t]$ , пусть  $f(t) = c_m t^m + \dots + c_0$ .
- Мы научимся подставлять в многочлен  $f$  матрицу  $A$  и линейный оператор  $\varphi$ :

$$f(A) := c_m A^m + \dots + c_1 A + c_0 E_n,$$

$$f(\varphi) := c_m \varphi^m + \dots + c_1 \varphi + c_0 \text{id}.$$

- $f(A)$  — матрица из  $M_n(K)$ . Умножение матрицы на число (выражение типа  $c_1 A$ ) — это умножение всех ее коэффициентов на это число.
- $f(\varphi)$  — это линейный оператор из  $\text{End}(V)$ . Результат умножения оператора на число (выражение типа  $c_1 \varphi$ ) — это оператор, значения которого во всех точках умножены на это число.

### Лемма 3

Оператор  $f(\varphi)$  в нашем фиксированном базисе имеет матрицу  $f(A)$ .

**Доказательство.** • При сложении линейных отображений матрицы складываются, при композиции — перемножаются.

• При умножении линейного отображения на число  $c \in K$  все его значения умножаются на это число, а значит, и значения на базисных векторах, но тогда и матрица отображения умножится на  $c$ . □

• Умножение в  $M_n(K)$  и в  $\text{End}(V)$  не коммутативно. Но многочлены от одного и того же оператора (матрицы) — коммутируют.

### Лемма 4

Пусть  $f, g \in K[t]$ .

1) Для любого  $\varphi \in \text{End}(V)$  выполнено  $f(\varphi) \cdot g(\varphi) = g(\varphi) \cdot f(\varphi)$ .

2) Для любой  $A \in M_n(K)$  выполнено  $f(A) \cdot g(A) = g(A) \cdot f(A)$ .

**Доказательство.** • Ввиду Леммы 3 достаточно доказать пункт 2.

• Пусть  $f(t) = c_m t^m + \dots + c_0$  и  $g(t) = d_k t^k + \dots + d_0$ .

• Так как

$$(c_i A^i) \cdot (d_j A^j) = c_i d_j A^{i+j} = d_j c_i A^{i+j} = (d_j A^j) \cdot (c_i A^i),$$

можно написать цепочку преобразований (везде считаем, что  $A^0 = E_n$ ):

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= \left( \sum_{i=0}^m c_i A^i \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^k d_j A^j \right) = \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^k (c_i A^i)(d_j A^j) = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^m (d_j A^j)(c_i A^i) = \\ &= \left( \sum_{j=0}^k d_j A^j \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^m c_i A^i \right) = g(A)f(A). \quad \square \end{aligned}$$

## Инвариантные подпространства и их свойства

- Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ , а  $\varphi \in \text{End}(V)$ .

### Определение

Подпространство  $W < V$  называется  $\varphi$ -инвариантным, если

$$\varphi(W) = \{\varphi(x) : x \in W\} \subset W.$$

- Вскоре мы увидим много примеров инвариантных подпространств и поймем, насколько это важное понятие. Начнем с простого свойства.

### Свойство

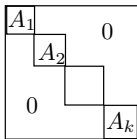
*Если  $W$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство, то  $\varphi|_W \in \text{End}(W)$ .*

**Доказательство.** По определению  $\varphi$ -инвариантного подпространства,  $\varphi|_W : W \rightarrow W$ . Условие линейности наследуется от  $\varphi$ .



## Определение

Пусть  $K$  – поле  $A_1, \dots, A_m$  – квадратные матрицы,  $A_i \in M_{n_i}(K)$ . Обозначим через  $\text{diag}(A_1, \dots, A_m)$  квадратную матрицу из  $M_{n_1 + \dots + n_m}(K)$ , в которой по главной диагонали последовательно стоят квадратные блоки  $A_1, \dots, A_m$ , а все остальные элементы равны 0.



## Лемма 5

Пусть  $V$  – линейное пространство над полем  $K$ ,  $\varphi \in \text{End}(V)$ , а  $V_1, \dots, V_m$  –  $\varphi$ -инвариантные подпространства  $V$ , причем  $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$ .

Зафиксируем в каждом подпространстве  $V_i$  базис  $e_1^i, \dots, e_{k_i}^i$ , пусть  $A_i$  – матрица отображения  $\varphi_i = \varphi|_{V_i}$  в этом базисе.

Тогда в базисе  $e_1^1, \dots, e_{k_1}^1, \dots, e_1^m, \dots, e_{k_m}^m$  отображение  $\varphi$  имеет матрицу  $\text{diag}(A_1, \dots, A_m)$ .

**Доказательство.** • Как строится матрица  $A$  отображения  $\varphi$  в некотором базисе  $e_1, \dots, e_n$ ? Ее  $j$  столбцом будет  $A^{(j)} = \varphi(e_j)$ .

• Пусть  $j^i$  — номер базисного вектора  $e_j^i$ , входящего в базис  $\varphi$ -инвариантного подпространства  $V_i$ . Подставим его и получим:

$$A^{(j^i)} = \varphi(e_j^i) \in V_i.$$

• Элемент из  $V_i$  раскладывается по его базису  $e_1^i, \dots, e_{k_i}^i$ , а значит, в разложении по объединенному базису пространства  $V$ , мы получим коэффициенты 0 при всех векторах, кроме этих (так как разложение по базису единственно!).

• Следовательно, 
$$A^{(j^i)} = \varphi(e_j^i) = \sum_{s=1}^{k_i} a_{s^i, j^i} e_{s^i} =$$

$$(0, \dots, 0, a_{1^i, j^i}, \dots, a_{k_i^i, j^i}, 0, \dots, 0)^T.$$

• Так как  $\varphi(e_j^i) = \varphi_i(e_j^i)$ , на места столбцов, соответствующих векторам из базиса  $e_1^i, \dots, e_{k_i}^i$ , будут вписаны соответствующие столбцы матрицы  $A_i$  (эти столбцы как раз и образованы коэффициентами в разложении векторов  $\varphi(e_j^i)$  по указанному базису пространства  $V_i$ ), а все остальные коэффициенты матрицы  $A$  в указанных столбцах — нули. □

## Характеристический многочлен оператора

- $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\dim(V) = n$ , а  $\varphi \in \text{End}(V)$ .

### Определение

Пусть  $A$  — любая матрица оператора  $\varphi$ .

*Характеристический многочлен* оператора  $\varphi$  — это  $\chi_\varphi(t) := \det(A - tE_n)$  (переменная из поля  $K$ ,  $\chi_\varphi \in K[t]$ ).

### Свойство 1

*Определение характеристического многочлена оператора корректно, то есть, не зависит от выбора матрицы оператора.*

*Доказательство.* • Пусть  $A'$  — другая матрица оператора  $\varphi$ .

- Тогда  $A' = C^{-1}AC$  для некоторой невырожденной матрицы  $C \in M_n(k)$ , следовательно,

$$\begin{aligned}\det(A' - tE_n) &= \det(C^{-1}AC - tE_n) = \det(C^{-1}AC - C^{-1}(tE_n)C) = \\ &= \det(C^{-1}(A - tE_n)C) = \det(C^{-1}) \det(A - tE_n) \det(C) = \det(A - tE_n).\end{aligned}$$

□

## Свойство 2

$\deg(\chi_\varphi) = n$ , старший коэффициент равен  $(-1)^n$ , а свободный член равен  $\det(A)$ .

**Доказательство.** • По диагонали матрицы  $A - tE_n$  стоят коэффициенты  $a_{i,i} - t$ , остальные коэффициенты  $t$  не содержат.

• Следовательно,  $t$  может быть максимум в степени  $n$ , и в такой степени получается ровно в одном случае — в произведении диагональных элементов, с коэффициентом  $(-1)^n$ .

• Для вычисления свободного члена подставим  $t = 0$  и получим  $\det(A)$ . □

• Итак,  $\chi_\varphi(t) = (-1)^n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t + \det(A)$ .

• Коэффициент  $c_{n-1}$  также имеет смысл.

## Определение

**След** матрицы  $A \in M_n(K)$  — это  $\text{Tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n}$  (сумма элементов на главной диагонали).

### Свойство 3

$$c_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Tr}(A).$$

**Доказательство.** • Пусть  $B = A - tE_n$ , а элементы этой матрицы обозначим через  $b_{i,j}$ .

- Рассмотрим любое произведение  $b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{n,\sigma(n)}$ , входящее в  $\det(B) = \chi_\varphi(t)$  (здесь  $\sigma \in S_n$ ).
- В этом произведении не может быть ровно один элемент, не лежащий на главной диагонали, так как  $\sigma$  не может оставлять на месте все числа от 1 до  $n$ , кроме одного.
- Следовательно, если  $\sigma \neq \text{id}$ , то произведение содержит переменную  $t$  в степени не более  $n - 2$ .
- Значит, вклад в  $c_{n-1}t^{n-1}$  дает только произведение диагональных элементов, равное  $(a_{1,1} - t)(a_{2,2} - t) \cdots (a_{n,n} - t)$ , откуда ясно, что  $c_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Tr}(A)$ . □

### Свойство 4

Если матрицы  $A$  и  $A'$  подобны, то  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A')$ .

**Доказательство.** • Выше доказано (см. Свойство 1), что тогда  $\det(A - tE_n) = \det(A' - tE_n)$ , откуда ввиду Свойства 3 следует, что  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A')$ .

## Теорема 8

Пусть  $V$  — конечномерное линейное пространство над полем  $K$ ,  $\dim(V) = n$ ,  $\varphi \in \text{End}(V)$ . Тогда  $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ .

**Неверное доказательство.** • Пусть  $\dim(V) = n$ , а  $A \in M_n(K)$  — матрица отображения  $\varphi$ .

- Тогда  $\chi_\varphi(t) = \det(A - tE_n)$ .
- Имеем  $\chi_\varphi(A) = \det(A - AE_n) = \det(0_n) = 0$ .
- Таким образом, оператор  $\chi_\varphi(\varphi)$  имеет нулевую матрицу, а значит,  $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ . □
- Найдите ошибку и не повторяйте ее на экзамене!

**Доказательство Теоремы 8.** • Обозначим через  $B(t)$  взаимную матрицу к  $A - tE_n$  (здесь  $t$  — переменная, принимающая значения из поля  $K$ ).

• Тогда  $b(t)_{i,j} = (A - tE_n)_{j,i}$  — это  $\pm$  минор порядка  $n - 1$  матрицы  $A - tE_n$ , который, очевидно, является многочленом от  $t$  степени не более чем  $n - 1$  (в подматрице  $A - tE_n$ , полученной вычеркиванием  $i$  строки и  $j$  столбца остается не более чем  $n - 1$  элемент вида  $a_{l,l} - t$ , остальные не содержат переменную  $t$ ).

• Поэтому существуют такие матрицы

$$B_0, \dots, B_{n-1} \in M_n(K), \text{ что} \\ B(t) = B_{n-1}t^{n-1} + \dots + B_1t + B_0.$$

• Пусть  $\chi_\varphi(t) = c_n t^n + \dots + c_1 t + c_0$  (нам известно, что  $\deg(\chi_\varphi) = \dim(V) = n$ ). Тогда

$$(c_n t^n + \dots + c_1 t + c_0)E_n = \chi_\varphi(t) \cdot E_n = \det(A - tE_n) \cdot E_n = \\ B(t) \cdot (A - tE_n) = (B_{n-1}t^{n-1} + \dots + B_1t + B_0) \cdot (A - tE_n)$$

(третий переход следует из Леммы 7.2).

- В левой и правой частях равенства

$$(c_n t^n + \dots + c_1 t + c_0) E_n =$$

$$(B_{n-1} t^{n-1} + \dots + B_1(t) + B_0) \cdot (A - t E_n)$$

коэффициенты при каждой степени  $t$  должны совпадать:

$$c_n E_n = -B_{n-1} \Rightarrow c_n A^n = -B_{n-1} A^n,$$

$$c_{n-1} E_n = B_{n-1} A - B_{n-2} \Rightarrow c_{n-1} A^{n-1} = B_{n-1} A^n - B_{n-2} A^{n-1},$$

...

$$c_1 E_n = B_1 A - B_0 \Rightarrow c_1 A^1 = B_1 A^2 - B_0 A,$$

$$c_0 E_n = B_0 A.$$

- Сложив синие равенства, получим:

$$\begin{aligned} \chi_\varphi(A) &= c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 E_n = \\ &= -B_{n-1} A^n + (B_{n-1} A^n - B_{n-2} A^{n-1}) + \dots + (B_1 A^2 - B_0 A) + B_0 A = 0. \end{aligned}$$

- Таким образом, оператор  $\chi_\varphi(\varphi)$  имеет нулевую матрицу, а значит,  $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ .



## Минимальный многочлен оператора.

- Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\dim(V) = n$ ,  $\psi \in \text{End}(V)$ .
- Пусть  $I(\psi)$  — множество всех таких многочленов  $f \in K[t]$ , что  $f(\psi) = 0$ .

### Свойство 1

$I(\psi)$  — идеал в  $K[t]$ .

**Доказательство.** • Достаточно проверить замкнутость  $I(\psi)$  по сложению и умножению на многочлены из  $K[t]$ .

- Пусть  $f, g \in I(\psi)$ . Тогда  $(f + g)(\psi) = f(\psi) + g(\psi) = 0 + 0 = 0$ , а значит,  $f + g \in I(\psi)$ .
- Пусть  $f \in I(\psi)$ ,  $h \in K[t]$ . Тогда  $(fh)(\psi) = f(\psi) \cdot h(\psi) = 0 \cdot h(\psi) = 0$ , а значит,  $fh \in I(\psi)$ . □
- Как мы знаем, любой идеал в  $K[t]$  — главный. Рассмотрим любой многочлен  $f$  такой, что  $I(\psi) = f \cdot K[t]$  (то есть, порождающий  $I(\psi)$ ).
- Тогда для любого другого многочлена  $g \in K[t]$ , порождающего  $I(\psi)$ , очевидно, выполнено  $f \div g$  и  $g \div f$ , то есть, эти два многочлена ассоциированы (отличаются умножением на константу).

- Следовательно, многочлены, порождающие  $I(\psi)$  — это в точности многочлены вида  $cf$ . Ровно один из них имеет единичный старший коэффициент, мы обозначим его через  $\text{Irr}_\psi$  и будем называть **минимальным многочленом** оператора  $\psi$ .

## Свойство 2

$$\chi_\psi : \text{Irr}_\psi.$$

**Доказательство.** • По теореме Гамильтона-Кэли мы знаем, что  $\chi_\psi(\psi) = 0$ , то есть,  $\chi_\psi \in I(\psi)$ .

- Все многочлены из идеала  $I(\psi)$  делятся на  $\text{Irr}_\psi$ . □

## Собственные числа, векторы и подпространства

• Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  
 $\dim(V) = n$ ,  $\psi \in \text{End}(V)$ .

### Определение

1) Число  $\lambda \in K$  называется **собственным числом** оператора  $\psi$ , если существует такой ненулевой вектор  $x \in V$ , что  $\psi(x) = \lambda \cdot x$ . В этом случае говорят, что  $x$  — **собственный вектор** числа  $\lambda$ .

2) Пусть  $\lambda$  — собственное число оператора  $\psi$ . Множество  $V_\lambda$ , состоящее из всех собственных векторов числа  $\lambda$  и вектора  $0$ , называется **собственным подпространством** числа  $\lambda$ .

3) Множество всех собственных чисел оператора  $\psi$  называется его **спектром** и обозначается через  $\text{Spec}(\psi)$ .

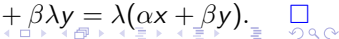
### Лемма 6

$V_\lambda$  — линейное подпространство  $V$ .

**Доказательство.** • Пусть  $x, y \in V_\lambda$ ,  $\alpha, \beta \in K$ .

• Нам достаточно проверить, что  $\alpha x + \beta y \in V_\lambda$ . Сделаем это:

$$\psi(\alpha x + \beta y) = \alpha\psi(x) + \beta\psi(y) = \alpha\lambda x + \beta\lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y).$$



## Теорема 9

$\text{Spec}(\psi)$  состоит в точности из корней характеристического многочлена  $\chi_\psi(t)$ .

**Доказательство.** • Зафиксируем базис  $V$ , пусть  $A$  — матрица  $\psi$  в этом базисе.

- Пусть  $\lambda \in \text{Spec}(\psi)$ ,  $x \in V_\lambda$ ,  $x \neq 0$ . Тогда  $\psi(x) = \lambda x = \lambda \cdot \text{id}(x)$ .
- Следовательно,  $(\psi - \lambda \text{id})(x) = 0$ , то есть  $x \in \ker(\psi - \lambda \text{id})$ .
- Значит,  $\ker(\psi - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$  и  $\dim \ker(\psi - \lambda \text{id}) \neq 0$ .
- Оператор  $\psi - \lambda \text{id}$  имеет матрицу  $A - \lambda E_n$  и по Следствию 1  $\text{rk}(A - \lambda E_n) = n - \dim(\ker(\psi - \lambda \text{id})) < n$ .
- Тогда по Следствию 7.2 имеем  $\chi_\psi(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0$ .
- Наоборот, пусть  $0 = \chi_\psi(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$ .
- Тогда по Следствию 7.2  $n > \text{rk}(A - \lambda E_n) = n - \dim(\ker(\psi - \lambda \text{id})) \Rightarrow \dim(\ker(\psi - \lambda \text{id})) > 0$ .
- Следовательно, существует ненулевой вектор  $x \in \ker(\psi - \lambda \text{id})$ .
- Это означает, что  $\psi(x) = \lambda x$ , то есть  $\lambda \in \text{Spec}(\psi)$ .



## Теорема 10

Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\psi \in \text{End}(V)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \text{Spec}(\psi)$  — различные собственные числа, а  $x_i$  — собственный вектор  $\lambda_i$ . Тогда  $x_1, \dots, x_k$  линейно независимы.

**Доказательство.** • Предположим противное и найдем из этих векторов нетривиальную нулевую линейную комбинацию с минимальным количеством ненулевых коэффициентов:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_s x_s = 0. \quad (*)$$

• Подействуем на левую и правую часть  $(*)$  оператором  $\psi$ :

$$0 = \psi(0) = \psi(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_s x_s) = \alpha_1 \psi(x_1) + \dots + \alpha_s \psi(x_s) = \lambda_1 \alpha_1 x_1 + \dots + \lambda_s \alpha_s x_s. \quad (**)$$

• Вычтем из  $(**)$  умноженное на  $\lambda_s$  равенство  $(*)$  и получим:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s)x_1 + \dots + \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s)x_{s-1} = 0.$$

• Так как собственные числа различны, все коэффициенты в этой линейной комбинации отличны от 0, но тогда ее существование противоречит выбору  $(*)$ .



## Следствие 2

Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  
 $\psi \in \text{End}(V)$ ,  $\text{Spec}(\psi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ . Тогда  $\sum_{i=1}^k V_{\lambda_i}$  —  
прямая сумма.

**Доказательство.** • На этот раз нам понадобится определение прямой сумма: нужно доказать, что равенство  $0 = \sum_{i=1}^k x_i$ , где  $x_i \in V_{\lambda_i}$  возможно только при  $x_1 = \dots = x_k = 0$ .

• Это очевидно следует из Теоремы 10: в противном случае, несколько ненулевых векторов из разных собственных пространств были бы линейно зависимы.  $\square$

## Диагонализируемые операторы и матрицы

### Определение

Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\psi \in \text{End}(V)$ .

- Оператор  $\psi$  — *диагонализуемый*, если в некотором базисе имеет *диагональную* матрицу (то есть матрицу, в которой все элементы не на главной диагонали равны 0).
- Матрица  $A \in M_n(K)$  называется *диагонализуемой*, если она имеет подобную диагональную матрицу.
- Матрица  $A \in M_n(K)$  является диагонализуемой, если и только если оператор умножения на  $A$  в каком-либо базисе является диагонализуемым.

### Теорема 11

Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\psi \in \text{End}(V)$ ,  $\text{Spes}(\psi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ . Тогда следующие три утверждения равносильны.

1° Оператор  $\psi$  — диагонализуемый.

$$2^\circ V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}.$$

3°  $V$  имеет базис, состоящий из собственных векторов  $\psi$ .

**Доказательство.**  $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ . • Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ , причем  $e_i$  — собственный вектор числа  $\lambda_i$  (возможно, не все эти собственные числа различны).

• Тогда  $\psi(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$ , поэтому, матрица  $\psi$  в этом базисе имеет вид  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

$1^\circ \Rightarrow 3^\circ$ . • Пусть матрица  $\psi$  в базисе  $e_1, \dots, e_n$  — это  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

• Тогда  $\psi(e_i) = \lambda_i e_i$ , причем, очевидно,  $e_i \neq 0$ .

Следовательно,  $\lambda_i$  — собственное число, а  $e_i$  — его собственный вектор.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ . • Пусть  $V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$ .

• Выделим базис в каждом из пространств  $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ , тогда каждый из этих базисов состоит из собственных векторов  $\psi$ , а объединение всех этих  $k$  базисов по свойствам прямой суммы дает базис  $V$ .

$3^\circ \Rightarrow 2^\circ$ . • Мы знаем, что  $W = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$  — линейное подпространство  $V$  (эта сумма прямая по Следствию 2).

• Пусть  $m_i = \dim(V_{\lambda_i})$ . Тогда

$$\dim(V) \geq \dim(W) = \sum_{i=1}^k \dim(V_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^k m_i.$$

• С другой стороны, пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $V$ , состоящий из собственных векторов.

• Тогда для каждого  $i \in \{1, \dots, k\}$  в  $V_{\lambda_i}$  лежит не более чем  $m_i$  векторов из базиса (так как они линейно независимы).

• Значит,  $\dim(V) \leq \sum_{i=1}^k m_i$ , откуда следует, что

$\dim(V) = \dim(W)$ , а значит,  $V = W$ .



## Корневые подпространства

- Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\dim(V) = n$ ,  $\varphi \in \text{End}(V)$ .
- Если прямая сумма собственных пространств оператора  $\varphi$  равна  $V$ , в некотором базисе этот оператор имеет диагональную матрицу, с которой очень удобно иметь дело.
- А что же делать, когда эта сумма меньше  $V$ ? Нам придется определить понятие, расширяющее собственное пространство.

### Определение

Пусть  $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ . Тогда

$$V(\lambda) = \{x \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : (\varphi - \lambda \text{id})^k(x) = 0\} \quad -$$

*корневое пространство* собственного числа  $\lambda$  оператора  $\varphi$ .

- В этом определении много сложного и неудобного — например, есть квантор существования, от которого мы вскоре избавимся.

## Свойство 0

$V(\lambda)$  — подпространство  $V$ .

**Доказательство.** • Пусть  $x, y \in V(\lambda)$ ,  $\alpha, \beta \in K$ .

- Нам надо доказать, что  $\alpha x + \beta y \in V(\lambda)$ .
- По определению, существует такое  $k \in \mathbb{N}$ , что  $(\varphi - \lambda \text{id})^k(x) = (\varphi - \lambda \text{id})^k(y) = 0$ ,

• Тогда и

$$(\varphi - \lambda \text{id})^k(\alpha x + \beta y) = \alpha(\varphi - \lambda \text{id})^k(x) + \beta(\varphi - \lambda \text{id})^k(y) = 0,$$

откуда следует, что  $\alpha x + \beta y \in V(\lambda)$ . □

## Свойство 1

Собственное пространство  $V_\lambda$  — подпространство корневого пространства  $V(\lambda)$ .

**Доказательство.** • Достаточно доказать, что  $V_\lambda \subset V(\lambda)$ .

- Пусть  $x \in V_\lambda$ . Тогда  $\varphi(x) = \lambda x$ , откуда следует, что  $(\varphi - \lambda \text{id})(x) = 0$ , то есть, подходит  $k = 1$ . □

## Лемма 7

Пусть  $\psi \in \text{End}(V)$ ,  $x \in V$ . Пусть  $k \in \mathbb{N}$  — минимальное такое число, что  $\psi^k(x) = 0$ . Тогда  $x, \psi(x), \dots, \psi^{k-1}(x)$  — ЛНЗ векторы. В частности,  $k \leq n$ .

**Доказательство.** • Пусть  $x, \psi(x), \dots, \psi^{k-1}(x)$  ЛЗ, то есть,

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \psi^i(x) = 0, \quad \text{не все } \alpha_i = 0 \quad (*)$$

• Пусть  $\ell$  — минимальный такой индекс, что  $\alpha_\ell \neq 0$ . Тогда сумму в (\*) можно начинать с индекса  $\ell$ .

• Применим к обеим частям равенства (\*) оператор  $\psi^{k-1-\ell}$  и получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \psi^{k-1-\ell}(0) = \psi^{k-1-\ell} \left( \sum_{i=\ell}^{k-1} \alpha_i \psi^i(x) \right) = \\ &= \alpha_\ell \psi^{k-1}(x) + \sum_{i=\ell+1}^{k-1} \alpha_i \psi^{k-1-\ell+i}(x) = \alpha_\ell \psi^{k-1}(x). \end{aligned}$$

• Последний переход верен, так как  $k-1-\ell+i \geq k$  при  $i \geq \ell+1$ , а значит,  $\psi^{k-1-\ell+i}(x) = 0$ .

• Полученное равенство не может быть верным, так как  $\alpha_\ell \neq 0$  и  $\psi^{k-1}(x) \neq 0$ .

• Поскольку в  $n$ -мерном линейном пространстве  $V$  нельзя выбрать более  $n$  ЛНЗ векторов,  $k \leq n$ .

- Теперь мы готовы избавиться от квантора существования в определении корневого пространства.

### Свойство 2

$$V(\lambda) = \{x \in V : (\varphi - \lambda \text{id})^n(x) = 0\}.$$

**Доказательство.** • Из определения следует, что

$$V(\lambda) \supset \{x \in V : (\varphi - \lambda \text{id})^n(x) = 0\}.$$

- Наоборот, пусть  $x \in V(\lambda)$ .
- Рассмотрим минимальное такое  $k \in \mathbb{N}$ , что  $(\varphi - \lambda \text{id})^k(x) = 0$  (такое  $k$  существует по определению).
- По Лемме 7 мы имеем  $k \leq n$ .
- Значит, и  $(\varphi - \lambda \text{id})^n(x) = 0$ . □

## Лемма 8

Пусть  $f, g \in K[t]$  — взаимно простые многочлены. Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ , а  $x \in V$  и  $\psi \in \text{End}(V)$  таковы, что  $(f(\psi))(x) = (g(\psi))(x) = 0$ .  
Тогда  $x = 0$ .

**Доказательство.** • Вспомним, что НОД двух многочленов представляется в виде их линейной комбинации.

- Поэтому, существуют такие многочлены  $p, q \in K[t]$ , что  $fp + qg = 1$ .
- Подставив в это равенство оператор  $\psi$  и получим  $(pf)(\psi) + (qg)(\psi) = \text{id}$ .
- Применим обе части последнего, операторного равенства к вектору  $x$ :

$$\begin{aligned}x = \text{id}(x) &= ((pf)(\psi))(x) + ((qg)(\psi))(x) = \\ &= (p(\psi))((f(\psi))(x)) + (q(\psi))((g(\psi))(x)) = \\ &= (p(\psi))(0) + (q(\psi))(0) = 0.\end{aligned}$$



## Теорема 12

Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,

$\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ . Тогда  $\sum_{i=1}^k V(\lambda_i)$  — прямая сумма.

**Доказательство.** • Пусть  $W_i = \sum_{j \neq i} V(\lambda_j)$ .

- По критерию прямой суммы нам достаточно доказать, что  $W_i \cap V(\lambda_i) = \{0\}$ .
- Пусть  $x \in W_i \cap V(\lambda_i)$ . Тогда  $(\varphi - \lambda_i \text{id})^n(x) = 0$ , так как  $x \in V(\lambda_i)$ .
- С другой стороны,  $x = \sum_{j \neq i} x_j$ , где  $x_j \in V(\lambda_j)$ .

Следовательно,  $(\varphi - \lambda_j \text{id})^n(x_j) = 0$ .

- Рассмотрим многочлен  $f(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^n$ . Тогда

$$\begin{aligned}(f(\varphi))(x) &= \sum_{j \neq i} (f(\varphi))(x_j) = \\ &= \sum_{j \neq i} \left( \prod_{s \notin \{i, j\}} (\varphi - \lambda_s \text{id})^n \right) \left( (\varphi - \lambda_j \text{id})^n(x_j) \right) \\ &= \sum_{j \neq i} \left( \prod_{s \notin \{i, j\}} (\varphi - \lambda_s \text{id})^n \right) (0) = 0.\end{aligned}$$

- Мы использовали Лемму 4: операторные многочлены от одного и того же оператора коммутируют.
- Очевидно,  $(t - \lambda_j)^n$  и  $f(t)$  взаимно просты (мы знаем разложение  $f$  на линейные множители и среди них нет  $t - \lambda_j$ ).
- Следовательно, по Лемме 8 мы имеем  $x = 0$ . □

## Теорема 13

Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\dim(V) = n$ ,  
 $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  и

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

Тогда выполнены следующие утверждения.

1)  $V = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$ .

2) Корневые пространства  $\varphi$ -инвариантны.

**Доказательство.** • Пусть  $f_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{m_j}$ .

• Понятно, что  $(f_1, \dots, f_k) = 1$  (мы знаем разложение каждого из этих многочленов на линейные множители, и ни один из них не является общим для всех  $k$  многочленов, значит, эти многочлены взаимно просты в совокупности).

• Тогда по теореме о линейном представлении НОД существуют такие многочлены  $h_1, \dots, h_k \in K[t]$ , что  $h_1 f_1 + \dots + h_k f_k = 1$ .

• Подставив в это равенство оператор  $\varphi$ , мы получим

$$(h_1 f_1)(\varphi) + \dots + (h_k f_k)(\varphi) = \text{id}. \quad (1)$$

- Для линейного отображения  $\psi \in \text{End}(V)$  и  $X \subset V$  мы будем использовать обозначение  $\psi(X) = \{\psi(x) : x \in X\}$ .
- Пусть  $W_i = ((h_i f_i)(\varphi))(V)$ .
- Подставив в качестве аргумента в (1) пространство  $V$ , мы получим

$$V = \text{id}(V) = \left( \sum_{i=1}^k (h_i f_i)(\varphi) \right) (V) = \sum_{i=1}^k \left( (h_i f_i)(\varphi) \right) (V) = \sum_{i=1}^k W_i. \quad (2)$$

## Утверждение

$$W_i \subset V(\lambda_i).$$

**Доказательство.** • Пусть  $y \in W_i$ . Тогда  $y = ((h_i f_i)(\varphi))(x)$ , где  $x \in V$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}(\varphi - \lambda_i \text{id})^{m_i}(y) &= ((\varphi - \lambda_i \text{id})^{m_i} \cdot h_i(\varphi) \cdot f_i(\varphi))(x) = \\(h_i(\varphi))\left(\left((\varphi - \lambda_i \text{id})^{m_i} \cdot f_i(\varphi)\right)(x)\right) &= (h_i(\varphi))\left(\prod_{j=1}^k (\varphi - \lambda_j \text{id})^{m_j}(x)\right) = \\(h_i(\varphi))\left((-1)^n \cdot (\chi_\varphi(\varphi))(x)\right) &= (h_i(\varphi))(0) = 0,\end{aligned}$$

так как  $\chi_\varphi(\varphi)$  — нулевой оператор по теореме Гамильтона-Кэли.

• Мы использовали тот факт, что операторные многочлены от одного и того же оператора коммутируют.  $\square$

- Докажем утверждение 1 теоремы.
- По Теореме 12 сумма корневых подпространств оператора  $\varphi$  — прямая. Значит  $\bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i) < V$ .
- С другой стороны, мы знаем,  $V = \sum_{i=1}^k W_i$ .
- Но  $\sum_{i=1}^k W_i$  — подмножество  $\bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$ , так как  $W_i < V(\lambda_i)$ .
- Это возможно лишь при  $V = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$ .
- Следовательно,  $\dim(V) = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)\right) = \sum_{i=1}^k \dim(V(\lambda_i))$ .
- Вместе с этим, так как  $\dim(W_i) \leq \dim(V(\lambda_i))$ ,  

$$\dim(V) = \dim\left(\sum_{i=1}^k W_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \dim(W_i) \leq \sum_{i=1}^k \dim(V(\lambda_i)).$$
- Следовательно, для всех  $i \in \{1, \dots, k\}$  мы имеем  $\dim(V(\lambda_i)) = \dim(W_i)$ , откуда ввиду  $W_i \leq V(\lambda_i)$  следует, что  $W_i = V(\lambda_i)$ .

- Докажем утверждение 2 теоремы.
- Так как мы доказали, что  $W_i = V(\lambda_i)$ , нам достаточно доказать, что  $W_i$  —  $\varphi$ -инвариантно.
- Проверим это. Действительно, пусть  $y \in W_i$ , тогда  $y = ((h_i f_i)(\varphi))(x)$ , где  $x \in V$ .
- Следовательно,

$$\varphi(y) = \varphi\left(\left((h_i f_i)(\varphi)\right)(x)\right) = \left((h_i f_i)(\varphi)\right)(\varphi(x)) \in W_i,$$

так как  $\varphi(x) \in V$ , а  $W_i = ((h_i f_i)(\varphi))(V)$ . □

## Теорема 14

Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\dim(V) = n$ ,  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  и

$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

Тогда выполнены следующие утверждения.

- 1) Пусть  $\varphi_i = \varphi|_{V(\lambda_i)}$ . Тогда оператор  $\varphi_i \in \text{End}(V(\lambda_i))$  имеет единственное собственное число —  $\lambda_i$ .
- 2)  $\dim(V(\lambda_i)) = m_i$ .

**Доказательство. 1)** • Подчеркнем, что формулировка пункта 1 корректна, так как  $V(\lambda_i)$  — это  $\varphi$ -инвариантное пространство по Теореме 13.

- Предположим противное, пусть  $\mu \in \text{Spec}(\varphi_i)$ ,  $\mu \neq \lambda_i$ , а  $x$  — собственный вектор  $\mu$ .
- Тогда  $(\varphi - \mu \text{id})(x) = 0$ .
- С другой стороны, так как  $x \in V(\lambda_i)$ , мы имеем  $(\varphi - \lambda_i \text{id})^n(x) = 0$ .
- Очевидно, многочлены  $t - \mu$  и  $(t - \lambda_i)^n$  взаимно просты, откуда по Лемме 8 имеем  $x = 0$ , противоречие с определением собственного вектора.

2) • По Теореме 13  $V = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$ .

- В каждом пространстве  $V(\lambda_i)$  зафиксируем свой базис, пусть  $A_i$  — матрица отображения  $\varphi_i$  в этом базисе.
- По Лемме 5 тогда в базисе  $V$ , полученном объединением зафиксированных выше базисов, отображение  $\varphi$  имеет матрицу  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$ .
- Пусть  $n_i = \dim(V(\lambda_i))$ . Тогда

$$\begin{aligned}(-1)^n \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{m_i} &= \chi_\varphi(t) = \det(A - tE_n) = \\ &= \det(\text{diag}(A_1, \dots, A_k) - t \cdot \text{diag}(E_{n_1}, \dots, E_{n_k})) = \\ &= \det(\text{diag}(A_1 - tE_{n_1}, \dots, A_k - tE_{n_k})) = \prod_{i=1}^k \det(A_i - tE_{n_i}) = \\ &= \prod_{i=1}^k \chi_{\varphi_i}(t). \quad (*)\end{aligned}$$

- По пункту 1,  $\text{Spec}(\varphi_i) = \{\lambda_i\}$ .
- Тогда по Теореме 9 многочлен  $\chi_{\varphi_i}(t)$  имеет единственный корень  $\lambda_i$ .

- По формуле (\*)

$$(-1)^n \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^k \chi_{\varphi_i}(t).$$

- Так как для каждого  $i \in \{1, \dots, k\}$   $\chi_{\varphi_i}(t)$  имеет единственный корень  $\lambda_i$ , остается единственная возможность:

$$\chi_{\varphi_i}(t) = (-1)^{m_i} (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

- Подставим это в формулу (\*):

$$(-1)^n \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^k \chi_{\varphi_i}(t) = \prod_{i=1}^k (-1)^{m_i} (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

- Следовательно,  $\dim(V(\lambda_i)) = m_i$ . □

## Относительный базис

### Определение

Пусть  $U < V$ .

- Вектора  $e_1, \dots, e_s$  из  $V$  *линейно независимы над  $U$* , если никакая их нетривиальная линейная комбинация не лежит в  $U$ .
- *Относительный базис  $V$  над  $U$*  — это  $\dim(V) - \dim(U)$  линейно независимых над  $U$  векторов.

### Свойство 1

$e_1, \dots, e_r \in V$  ЛНЗ над  $U$ , если и только если  $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_r$  ЛНЗ в факторпространстве  $V/U$ .

**Доказательство.** Очевидно ввиду того, что равенство нулю линейной комбинации  $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_r$  в  $V/U$  равносильно принадлежности  $U$  аналогичной линейно комбинации векторов  $e_1, \dots, e_r$  в  $V$ . □

## Свойство 2

$e_1, \dots, e_r$  — *относительный базис  $V$  над  $U$* , если и только если  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r$  — *базис  $V/U$* .

**Доказательство.** К Свойству 1 нужно лишь добавить, что по доказанному в главе Линейные пространства  $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$ . □

## Свойство 3

*Относительный базис  $V$  над  $U$  — максимальное множество векторов из  $V$ , ЛНЗ над  $U$ .*

*Если  $e_1, \dots, e_s \in V$  линейно независимы над  $U$ , то эти вектора можно дополнить до относительного базиса  $V$  над  $U$ .*

**Доказательство.** Воспользуемся Свойствами 1 и 2 а также тем, что любое ЛНЗ множество в  $V/U$  можно дополнить до базиса. □

## Разбиение корневого пространства на ядра

- Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\dim(V) = n$ ,  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ , а  $m$  — кратность корня  $\lambda$  в характеристическом многочлене  $\chi_\varphi(t)$ .

- Тогда  $\dim(V(\lambda)) = m$  по Теореме 14.

- Пусть  $\psi = \varphi - \lambda \text{id}$ .

- Введем обозначения

$$W_0 := \{0\}, \quad W_i := \ker(\psi^i) \text{ для } i \in \mathbb{N}.$$

- Понятно, что  $W_0 \leq W_1 \leq \dots \leq W_n = V(\lambda)$  (последнее равенство следует из свойства корневых пространств).

- Пусть  $\ell$  — минимальное такое натуральное число, что  $W_\ell = V(\lambda)$ .

- Так как  $W_i \leq V(\lambda)$ , мы имеем  $V(\lambda) = W_\ell = W_{\ell+1} = \dots$ , поэтому, все последующие ядра после  $W_\ell$  не будут меняться.

- Введем обозначения

$$p_i := \dim(W_i) \text{ (здесь } i \in \{0, \dots, \ell\}),$$

$$r_i := p_i - p_{i-1} \text{ (здесь } i \in \{1, \dots, \ell\}).$$

- Отметим, что количество векторов в относительном базисе  $W_\ell$  по  $W_{t-1}$  равно

$$\dim(W_\ell) - \dim(W_{t-1}) = \sum_{i=t}^{\ell} (\dim(W_i) - \dim(W_{i-1})) = \sum_{i=t}^{\ell} r_i.$$

### Лемма 9

Пусть  $2 \leq t \leq \ell$  и у нас есть таблица, строки которой занумерованы числами от  $t$  до  $\ell$ . В строке с номером  $s$  стоят вектора  $e_1^s, \dots, e_{r_s}^s \in W_s$ . Предположим, что для каждого  $s \in \{t, \dots, \ell\}$  вектора в  $s$  строке ЛНЗ над  $W_{s-1}$ . Тогда все записанные в таблице вектора, а также  $\psi(e_1^t), \dots, \psi(e_{r_t}^t)$  вместе ЛНЗ над  $W_{t-2}$ . В частности, эти вектора можно дополнить до относительного базиса  $W_\ell$  над  $W_{t-2}$ .

**Доказательство.** • Предположим противное. Пусть

$$\sum_{s=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_s} \alpha_i^s e_i^s + \sum_{j=1}^{r_t} \beta_j \psi(e_j^t) = w, \quad \text{где } w \in W_{t-2}, \quad (*)$$

причем не все коэффициенты  $\alpha_i^s$  и  $\beta_j$  равны 0.

- Разберем два случая: не все коэффициенты  $\alpha_i^s$  равны 0 или все они равны 0.

## Случай 1: не все $\alpha_i^s$ равны 0.

- Пусть  $q$  — наибольшее такое число, что существует отличный от 0 индекс  $\alpha_i^q$ .
- Тогда  $\alpha_i^s = 0$  при  $s > q$  и в первой сумме из (\*) можно вести суммирование до  $q$  вместо  $\ell$ .
- Подействуем на обе части (\*) оператором  $\psi^{q-1}$  и получим:

$$0 = \psi^{q-1}(w) = \sum_{j=1}^{r_t} \beta_j \psi^q(e_j^t) + \sum_{s=t}^q \sum_{i=1}^{r_s} \alpha_i^s \psi^{q-1}(e_i^s) =$$
$$\sum_{i=1}^{r_q} \alpha_i^q \psi^{q-1}(e_i^q) = \psi^{q-1} \left( \sum_{i=1}^{r_q} \alpha_i^q e_i^q \right),$$

откуда следует, что  $\sum_{i=1}^{r_q} \alpha_i^q e_i^q \in W_{q-1}$ , противоречие с условием.

## Случай 2: все $\alpha_j^s$ равны 0.

- Тогда существует  $\beta_j \neq 0$ , а вся первая сумма из (\*) — нулевая и (\*) превращается в

$$w = \sum_{j=1}^{r_t} \beta_j \psi(e_j^t) = \psi\left(\sum_{j=1}^{r_t} \beta_j e_j^t\right).$$

- Тогда  $0 = \psi^{t-2}(w) = \psi^{t-1}\left(\sum_{j=1}^{r_t} \beta_j e_j^t\right)$ .

- Следовательно,  $\sum_{j=1}^{r_t} \beta_j e_j^t \in W_{t-1}$ , противоречие с условием. □

## Следствие 3

Для всех  $t \in \{2, \dots, \ell\}$  выполнено  $r_{t-1} \geq r_t$ .

**Доказательство.** • Из Леммы 9 следует, что

$$r_t + \sum_{j=t}^{\ell} r_j \leq \dim(W_\ell) - \dim(W_{t-2}) = \sum_{j=t-1}^{\ell} r_j,$$

откуда следует, что  $r_{t-1} \geq r_t$ . □

## Лемма 10

Пусть  $2 \leq t \leq \ell$  и у нас есть таблица, строки которой занумерованы числами от  $t$  до  $\ell$ . В строке с номером  $i$  стоят вектора  $e_1^i, \dots, e_{r_i}^i \in W_i$ . Предположим, что для каждого  $i \in \{t, \dots, \ell\}$  вектора в строках с  $i$  по  $\ell$  образуют относительный базис  $W_\ell$  над  $W_{i-1}$ . Пусть  $T$  — множество, состоящее из всех векторов в таблице, а также  $\psi(e_1^t), \dots, \psi(e_{r_t}^t)$ . Тогда вектора из  $T$  можно дополнить до относительного базиса  $W_\ell$  над  $W_{t-2}$ , дописав  $r_{t-1} - r_t$  векторов из  $W_{t-1}$ .

**Доказательство.** • Пусть  $s = r_{t-1} - r_t$ . По Следствию 3,  $s \geq 0$ .

• По Лемме 9 вектора из  $T$  ЛНЗ над  $W_{t-2}$  и их можно дополнить до относительного базиса  $W_\ell$  над  $W_{t-2}$  векторами  $x_1, \dots, x_s \in W_\ell$ . (Нужно в точности  $s$  векторов, как видно из вычислений Следствия 3.)

• Так как  $e_1^t, \dots, e_{r_t}^t, \dots, e_1^\ell, \dots, e_{r_\ell}^\ell$  — относительный базис  $W_\ell$  по  $W_{t-1}$ .

• Поэтому, в факторпространстве  $W_\ell/W_{t-1}$  для любого  $q \in \{1, \dots, s\}$  мы имеем

$$\bar{x}_q = \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \beta_{i,q}^j \bar{e}_i^j, \quad \text{где все } \beta_{i,q}^j \in K.$$

- Положим 
$$y_q = x_q - \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \beta_{i,q}^j e_i^j. \quad (*)$$

- Тогда  $\bar{y}_q = 0$  в  $W_\ell/W_{t-1}$ , значит,  $y_q \in W_{t-1}$ .
- Докажем, что  $y_1, \dots, y_s \in W_{t-1}$  также дополняют вектора из  $T$  до относительного базиса  $W_\ell$  над  $W_{t-2}$ .
- Для этого достаточно показать, что все эти вектора ЛНЗ над  $W_{t-2}$ . Пусть это не так и

$$\sum_{i=1}^s \gamma_i y_i + \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \delta_i^j e_i^j + \sum_{i=1}^{r_t} \alpha_i \psi(e_i^t) = w \in W_{t-2},$$

где все  $\gamma_i, \alpha_i, \delta_i^j \in K$  и не все они равны 0.

- Из Леммы 9 следует, что не все  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$  равны 0.
- Подставив для каждого  $y_i$  выражение (\*), после приведения подобных членов, получим

$$\sum_{i=1}^s \gamma_i x_i + \sum_{j=t}^{\ell} \sum_{i=1}^{r_j} \varepsilon_i^j e_i^j + \sum_{i=1}^{r_t} \alpha_i \psi(e_i^t) = w \in W_{t-2},$$

где  $\varepsilon_i^j = \delta_i^j + \sum_{q=1}^s \gamma_q \beta_{i,q}^j$ .

- Но по выбору  $x_1, \dots, x_s$  тогда  $\gamma_1 = \dots = \gamma_s = 0$ , противоречие.

## Разбиение корневого пространства собственного числа оператора на Жордановы клетки

- Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\dim(V) = n$ ,  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $\lambda \in \text{Spec}(\varphi)$ , а  $m$  — кратность корня  $\lambda$  в характеристическом многочлене  $\chi_\varphi(t)$ .

- Тогда  $\dim(V(\lambda)) = m$ .

- Мы научимся выбирать такой базис корневого пространства  $V(\lambda)$ , в котором матрица  $\varphi|_{V(\lambda)}$  имеет достаточно простой вид — диагональ из **Жордановых клеток**.

- Пусть  $\psi = \varphi - \lambda \text{id}$ .

- Введем обозначения  $W_0 = \{0\}$ ,  $W_i = \ker(\psi^i)$  для  $i \in \mathbb{N}$ .

- Мы доказали, что существует такое минимальное натуральное число  $\ell$ , что  $W_\ell = V(\lambda)$ , тогда  $W_0 \leq W_1 \leq \dots \leq W_\ell = V(\lambda) = W_{\ell+1} = W_{\ell+2} = \dots$

- Введем обозначения  $p_i = \dim(W_i)$  (здесь  $i \in \{0, \dots, \ell\}$ ), а  $r_i = p_i - p_{i-1}$  (здесь  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ ).

- По Следствию 3,  $1 \leq r_\ell \leq r_{\ell-1} \leq \dots \leq r_1$ , следовательно,

$$\ell \leq \sum_{i=1}^{\ell} r_i = \sum_{i=1}^{\ell} (p_i - p_{i-1}) = p_\ell - p_0 = \dim(W_\ell) = \dim(V(\lambda)) = m.$$

### Шаг 1: ищем базисы ядер $W_j$ .

• Сначала находим базис  $W_1$  (назовем его  $B_1$ ), потом дополняем его до базиса  $W_2$  (назовем это дополнение  $B_2$ ), и так далее, пока не дополним до базиса  $W_\ell$  (последнее дополнение — это  $B_\ell$ ).

### Шаг 2: построение и заполнение лестницы.

- Высота лестницы  $\ell$ , на  $i$  ступени будут вектора из  $W_i$ , ширина  $i$  ступени равна  $r_i$ .
- Суммарное количество клеток в лестнице равно  $m$ . В строках с  $s$  по  $\ell$  будет  $r_s + \dots + r_\ell$  векторов — как раз столько, сколько должно быть в относительном базисе  $W_\ell$  над  $W_{s-1}$ .
- Опишем процедуру заполнения лестницы. Будем делать это сверху вниз так, чтобы под каждым вектором  $e$  был выписан вектор  $\psi(e)$  и для всех  $s \in \{1, \dots, \ell\}$  вектора в строках с  $s$  по  $\ell$  образовывали относительный базис  $W_\ell$  по  $W_{s-1}$ .

$W_\ell$	$e_1^\ell$	$e_2^\ell$	$e_{r_\ell}^\ell$			
$W_{\ell-1}$	$\psi(e_1^\ell)$	$\psi(e_2^\ell)$	$\psi(e_{r_\ell}^\ell)$	$e_{r_\ell+1}^{\ell-1}$	$e_{r_\ell-1}^{\ell-1}$	
$W_{\ell-2}$	$\psi^2(e_1^\ell)$	$\psi^2(e_2^\ell)$	$\psi^2(e_{r_\ell}^\ell)$	$\psi(e_{r_\ell+1}^{\ell-1})$	$\psi(e_{r_\ell-1}^{\ell-1})$	$e_{r_\ell-2}^{\ell-2}$

...

$W_1$	$\psi^{\ell-1}(e_1^\ell)$	$\psi^{\ell-1}(e_2^\ell)$	$\psi^{\ell-1}(e_{r_\ell}^\ell)$	$\psi^{\ell-2}(e_{r_\ell+1}^{\ell-1})$	$\psi^{\ell-2}(e_{r_\ell-1}^{\ell-1})$	$\psi^{\ell-3}(e_{r_\ell-2}^{\ell-1})$	...	$e_{r_1}^1$
-------	---------------------------	---------------------------	----------------------------------	--	--	--	-----	-------------

**База:**  $\ell$  строка. В верхней строке лестницы выписываем вектора из  $B_\ell = \{e_1^\ell, \dots, e_{r_\ell}^\ell\}$ .

**Переход  $s \rightarrow s - 1$ .** Пусть строки  $s, \dots, \ell$  уже заполнены, обозначим вектора в  $s$  строке через  $e_1^s, \dots, e_{r_s}^s$ .

- В  $s - 1$  строке под каждым вектором  $e_i^s$  запишем вектор  $\psi(e_i^s)$  (очевидно,  $e_i^s \in W_s \Rightarrow \psi(e_i^s) \in W_{s-1}$ ).
- По Лемме 10 все выписанные вектора можно дополнить до относительного базиса  $W_\ell$  по  $W_{s-2}$ , добавив недостающие  $r_{s-1} - r_s$  векторов из  $W_{s-1}$  (на самом деле эти вектора можно выбрать даже из  $B_{s-1}$ ).

$W_\ell$	$e_1^\ell$	$e_2^\ell$	$e_{r_\ell}^\ell$			
$W_{\ell-1}$	$\psi(e_1^\ell)$	$\psi(e_2^\ell)$	$\psi(e_{r_\ell}^\ell)$	$e_{r_{\ell+1}}^{\ell-1}$	$e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1}$	
$W_{\ell-2}$	$\psi^2(e_1^\ell)$	$\psi^2(e_2^\ell)$	$\psi^2(e_{r_\ell}^\ell)$	$\psi(e_{r_{\ell+1}}^{\ell-1})$	$\psi(e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1})$	$e_{r_{\ell-2}}^{\ell-2}$

...

$W_1$	$\psi^{\ell-1}(e_1^\ell)$	$\psi^{\ell-1}(e_2^\ell)$	$\psi^{\ell-1}(e_{r_\ell}^\ell)$	$\psi^{\ell-2}(e_{r_{\ell+1}}^{\ell-1})$	$\psi^{\ell-2}(e_{r_{\ell-1}}^{\ell-1})$	$\psi^{\ell-3}(e_{r_{\ell-2}}^{\ell-1})$	...	$e_{r_1}^1$
-------	---------------------------	---------------------------	----------------------------------	--	--	--	-----	-------------

- Итак, пусть все клетки лестницы заполнены.
- Спустившись до первого этажа, мы получим относительный базис  $W_\ell$  над  $W_0 = \{0\}$ , а это просто базис  $W_\ell$ , который нам и будет нужен — так называемый жорданов базис.

### Шаг 3: Жордановы клетки собственного числа $\lambda$ .

- Рассмотрим любой столбец лестницы. Пусть  $e_1, \dots, e_q$  — его вектора снизу вверх ( $e_1 \in W_1$ ).
- По построению, тогда  $\psi(e_1) = 0$  и  $\psi(e_i) = e_{i-1}$  для  $i \in \{2, \dots, q\}$ .
- Пусть  $U_q = \text{Lin}(e_1, \dots, e_q)$ . Тогда из доказанного понятно, что  $U_q$  —  $\psi$ -инвариантное подпространство и линейное отображение  $\psi|_{U_q}$  имеет в базисе  $e_1, \dots, e_q$  матрицу

$$J_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(над главной диагональю — диагональ из 1, все остальные 0 — вспомните, как строится матрица отображения!).

- Так как  $\varphi = \psi + \lambda \text{id}$ , это отображение имеет в базисе  $e_1, \dots, e_q$  матрицу

$$J_q(\lambda) = J_q + \lambda E_q = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

(на главной диагонали  $\lambda$ , над главной диагональю — диагональ из 1, все остальные 0).

- Матрица  $J_q(\lambda)$  называется *жордановой клеткой размера  $q$  числа  $\lambda$* , а  $U_q$  — *клеточным пространством* оператора  $\varphi$ .
- Таким образом, каждому столбцу лестницы для числа  $\lambda$  соответствует жорданова клетка, а их общее количество равно длине нижней строки лестницы — это, кстати,  $\dim(V_\lambda)$  (размерность собственного пространства).
- Суммарный размер клеток с собственным числом  $\lambda$  — это количество клеток в лестнице, то есть,  $m$  — кратность  $\lambda$ .
- Размер максимальной клетки с числом  $\lambda$  — это высота лестницы  $\ell$ .

## Построение ЖНФ оператора $\varphi$ .

### Теорема 15

Пусть  $V$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $\dim(V) = n$ ,  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $\text{Spec}(\varphi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  и характеристический многочлен раскладывается на линейные множители:


$$\chi_\varphi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

Тогда оператор  $\varphi$  в некотором базисе имеет **Жорданову нормальную форму** — матрицу, на диагонали которой стоят жордановы клетки, а все остальные элементы равны 0.

**Доказательство.** • Нужно выполнить описанный алгоритм для каждого собственного числа.

• В итоге матрица оператора, суженного на каждое из корневых пространств, будет объединением нескольких жордановых клеток.

• По Теореме 13, в нашем случае  $V$  есть прямая сумма корневых пространств всех собственных чисел.

• Тогда, объединив построенные базисы для всех корневых пространств, мы получим **жорданов базис**, в котором матрица оператора и будет **Жордановой нормальной формой**. 

- У ЖНФ оператора на главной диагонали стоят собственные числа, на диагонали над главной в некоторых клетках стоят 1, а во всех остальных клетках стоят 0.