Алгебра. Практика. 2024-25

Занятие 1. 09.09.2025.

0. Пусть K — кольцо, $a \in K$. Докажите, что $a \cdot 0{=}0$.

1. Выполните деление: $\frac{2+1i}{1-2i}$.

2. Решите квадратное уравнение: $x^2 - 4x + 5 = 0$.

3. Найдите модуль и аргумент числа $-\sqrt{3} + i$.

4. Пусть $a = \cos(\frac{5\pi}{7}) + i\sin(\frac{5\pi}{7})$ и $b = \cos(\frac{4\pi}{7}) + i\sin(\frac{4\pi}{7})$.
а) Найдите $(a+b)^4$.
б) Найдите все корни 3 степени из $(a+b)$.

5. Комплексное число z таково, что $z + \frac{1}{z} = 2\cos(\alpha)$ (где α известно). Найдите $z^n + \frac{1}{z^n}$.

6. Пусть $z \in \mathrm{C}$, $z \neq -1$, $|z| = 1$. Докажите, что существует такое вещественное число t, что $z = \frac{1-ti}{1+ti}$.

Занятие 2. 16.09.2025.

1. Пусть $x + iy = (s+it)^n$. Докажите, что $x^2 + y^2 = (s^2 + t^2)^n$.

2. Решите уравнение:
а) $z^5 = \overline{z}$; б) $z^5 + \overline{z} = 0$.

3. Найдите НОД и его линейное представление с помощью алгоритма Евклида:
а) $(2453, 2007)$;
б) $(2376, 702)$.

4. Последовательность чисел Фибоначчи определяется соотношениями $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ при $n \geq 1$.
а) Найдите (F_n, F_{n+1}).
б) Найдите линейное представление НОД (F_n, F_{n+1}).

5. Докажите, что все натуральные числа, имеющие нечетное число натуральных делителей — это точные квадраты

6. Пусть $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел от 1 до n, взаимно простых с n. Докажите, что $\varphi(n) \,\vdots\, 2$ при $n > 2$.

Занятие 3. 23.09.2025.

1. Решите в целых числах уравнение.

а) $258x - 172y = 112$;

б) $209x - 513y = 76$.

2. Натуральное число n не имеет собственных делителей, больших 1 и не превосходящих $\sqrt{n}$. Докажите, что $n \in \mathbb{P}$.

3. Докажите, что простых чисел вида $4k - 1$ бесконечно много.

4. Докажите, что $d(n)$ (количество натуральных делителей n) мультипликативна (то есть $d(ab) = d(a)d(b)$ для взаимно простых натуральных a и b).

5. а) Верно ли, что $2\mathbb{Z}$ — кольцо главных идеалов?

б) Опишите все идеалы в кольца $2\mathbb{Z}$.

Занятие 4. 30.09.2025.

1. Найдите вычет обратный 17 по модулю 336.

2. Решите сравнение: а) $91x \equiv 154 \pmod{112}$; а) $76x \equiv 232 \pmod{220}$.

3. Решите систему сравнений

а) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 7 \end{cases}$;

4. Число $n \in \mathbb{N}$ имеет 15 натуральных делителей. Сколько простых делителей может иметь n?

5. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ пусть $S_j(n) = \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{j} + \mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{j+4} + \ldots$ (сумма всех биномиальных коэффициентов с номерами, имеющими остаток j от деления на 4).

а) Докажите, что $S_0 - S_2 = \mathrm{Re}((1+\mathrm{i})^\mathrm{n})$.

б) Найдите S_0, S_1, S_2 и S_3.

Занятие 5. 7.10.2025.

1. Докажите, что функция Мёбиуса μ мультипликативна.

2. Решите систему сравнений

а $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 7 \\ x \equiv 37 \pmod{41} \\ x \equiv 7 \pmod{85} \end{cases}$.

3. Пусть $\rho \in \mathrm{C}$ — корень 3 степени из 1, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Докажите, что $(a + b\rho + c\rho^2)^{13}(a + b\rho^2 + c\rho)^{13} \in \mathbb{R}$.

4. Число n нечетно. Докажите, что $2^{n!} - 1$ делится на n.

5. Число $\varepsilon \in \mathrm{C}$ называется *первообразным* корнем из 1 степени n, если $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon^k \neq 1$ при $k < n$.

а) Найдите сумму первообразных корней степени p из 1, где $p \in \mathbb{P}$.

б) Найдите сумму первообразных корней степени $p_1 p_2 \dots p_k$ из 1, где $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}$ — разные.

Упражнения для самостоятельной тренировки перед КР 1.

1. Решите в целых числах уравнение $561x - 171y = 24$.

2. Найдите вычет, обратный к 117 по модулю 484.

3. Решите систему сравнений. $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 11 \pmod{13} \\ x \equiv 51 \pmod{53} \end{cases}$.

Занятие 6. 21.10.2025.

1. Вещественные числа p, q таковы, что $x^4 + px + q \vdots x^2 + 10x + 1$. Найдите p и q.

2. С помощью алгоритма Евклида, найдите $(x^7 + x^2 + 1, x^{12} - 1)$ и его линейное представление.

3. При каких n многочлен $x^n - 1$ делится на $x^2 + x + 1$?

4. Найдите все многочлены степени 4, дающие остаток $2x$ приделении на $(x-1)^2$ и остаток $3x$ при делении на $(x-2)^3$.

5. а) Пусть $n > m > 0$, $c > 0$. Докажите, что многочлен $ax^n + bx^m + c$ не может иметь корня кратности 3 и более.

б) Пусть $n_k > n_{k-1} > \ldots > n_0$. Докажите, что многочлен $a_k x^{n_k} + a_{k-1} x^{n_{k-1}} + \ldots + a_0 x^{n_0}$ не может иметь ненулевого корня кратности более k.

Занятие 7. 28.10.2025.

1. Какую кратность корня 1 может иметь многочен $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$?

2. Найдите интерполяционный многочлен по точкам:
$x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$,
$y_0 = 3$, $y_1 = -10$, $y_2 = 5$, $y_3 = 7$, $y_4 = 8$.

3. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни многочлена $x^3 + 3x + 1$. Вычислите
а) $\frac{1}{(3-\alpha_1)} + \frac{1}{(3-\alpha_2)} + \frac{1}{(3-\alpha_3)}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни многочлена x^3+3x+1.
б) $\frac{1}{(3-\alpha_1)^2} + \frac{1}{(3-\alpha_2)^2} + \frac{1}{(3-\alpha_3)^2}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни многочлена $x^3 + 3x + 1$.

4. $f(x) \in \mathrm{C}[\mathrm{x}]$ — многочлен с $\deg(f) < n$, а $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — корни степени n из 1. Известно, что $f(\varepsilon_1) = y_1, \dots, f(\varepsilon_n) = y_n$. Докажите, что $f(0) = \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$.

5. Пусть $\varphi(t) = (t - x_1) \ldots (t - x_n)$, числа $x_1, \dots, x_n$ различны, $n > 3$. Найдите $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\varphi'(x_i)}$.

Занятие 8. 11.11.2025.

1. Найдите интерполяционный многочлен по точкам:
$x_0 = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = i$, $x_3 = -i$,
$y_0 = 3$, $y_1 = 4$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$.

2. Разложите в сумму простейших в $\mathbb{C}(x)$ и в $\mathbb{R}(x)$:
а) $\frac{x}{x^4-1}$;
б) $\frac{x}{x^n-1}$, где $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

3. Многочлен
а) $f(x) \in \mathbb{C}[x]$;
б) $f(x) \in K[x]$, где K — поле
таков, что $f(x^n) \vdots x - 1$. Докажите, что $f(x^n) \vdots (x^n - 1)$.

Неразобранные задачи

7-4. $f(x) \in$ C[x] — многочлен с $\deg(f) < n$, а $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — корни степени n из 1. Известно, что $f(\varepsilon_1) = y_1$, …, $f(\varepsilon_n) = y_n$. Докажите, что $f(0) = \frac{y_1+\ldots+y_n}{n}$.

7-5. Пусть $\varphi(t) = (t - x_1)\ldots(t - x_n)$, числа $x_1, \ldots, x_n$ различны, $n > 3$. Найдите $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\varphi'(x_i)}$.

6-5б. Пусть $n_k > n_{k-1} > \ldots > n_0$. Докажите, что многочлен $a_k x^{n_k} + a_{k-1}x^{n_{k-1}} + \ldots + a_0 x^{n_0}$ не может иметь ненулевого корня кратности более k.

Занятие 9. 18.11.2025.

1. Разложите в сумму простейших $\frac{x^3}{(x^2-1)^2}$ над $\mathbb{R}$.

2. Решите квадратное сравнение $x^2 + 4x + 6 \equiv 0 \pmod{17}$.

3. а) Найдите многочлен деления круга $\Phi_p(t)$, где $p \in \mathbb{P}$.
б) Найдите многочлен деления круга $\Phi_{p^k}(t)$, где $p \in \mathbb{P}$.

Неразобранные задачи

8-3б. 3. Многочлен $f(x) \in K[x]$, где K — поле таков, что $f(x^n) \vdots x-1$. Докажите, что $f(x^n) \vdots (x^n - 1)$.

7-5. Пусть $\varphi(t) = (t - x_1)\dots(t - x_n)$, числа $x_1, \dots, x_n$ различны, $n > 3$. Найдите $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\varphi'(x_i)}$.

Упражнения для самостоятельной тренировки перед КР 2.

0. Найдите наибольший общий делитель многочленов и его линейное представление: $f(x) = x^{16} + x^8 + 1$ и $g(x) = x^3 + 1$.

1. Найдите наибольшую возможную кратность корня -1 у многочлена вида $ax^8 + bx^7 + 1$ (коэффициенты a и b — вещественные числа).

2. Постройте многочлен f наименьшей степени такой, что $f(1) = -1$, $f(-1) = -3$, $f(i) = -1$, $f(-i) = -1$.

3. Вычислите $\frac{1}{(2-\alpha_1)^2} + \frac{1}{(2-\alpha_2)^2} + \frac{1}{(2-\alpha_3)^2}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни многочлена $x^3 + x + 3$.

4. Разложите дробно-рациональную функцию $\frac{x}{(x^2+1)^2}$ на простейшие над $\mathbb{R}$.

5. Для каких пар натуральных чисел k и n многочлен $x^k + x^n + 1$ делится на $x^2 - x + 1$?

6. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Найдите многочлен деления круга $\Phi_{2p}(t)$.

Занятие 10. 02.12.2024.

3. Докажите, что уравнение $x^3 = 1$ в $\mathbb{Z}_p$ имеет три решения при $p \equiv 1 \pmod 3$ и одно решение при $p \equiv 2 \pmod 3$.

4. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k + 1$.

5. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $6k + 1$.

Занятие 11. 02.12.2025.

1. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ таков, что $f(1) = 111$ и $f(4) = 117$. Докажите, что f не имеет $\mathbb{Z}$ корней.

2. Докажите, что многочлен $x^4 + 2x^2 + 3x + 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

3. Многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ с $\deg(f) \leq n$ принимает целые значения в точках k, $k + 1$, …, $k + n$, где $k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

4. Даны различные целые числа $a_1, \ldots, a_n$. Докажите, что многочлен $f(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_n) - 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$

а) при нечетном n; б) при четном n.

Неразобранные задачи

10-4. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $6k+1$.

11-4. Даны различные целые числа $a_1, \ldots, a_n$. Докажите, что многочлен $f(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_n) - 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$

а) при нечетном n; б) при четном n.

Занятие 12. 09.12.2025.

1. Вектора x, y, z линейно независимы. Являются ли линейно независимыми следующие тройки векторов:

а) $x+y$, $x+z$, $y+z$;

б) $x-y$, $x-z$, $y-z$?

2. Какие из данных подмножеств K^3 (где K — поле) являются линейными подпространствами? А какие аффинными?

а) $\{(2z+2x, z+x, z-x) \,:\, x, z \in K\}$.

б) $\{(2z+2, z+x+3, z-x) \,:\, x, z \in K\}$.

3. Пусть V_1, V_2, V_3 — линейные подпространства линейного пространства V, причем V_1 — подпространство V_3. Докажите, что $(V_1 + V_2) \cap V_3 = V_1 + V_2 \cap V_3$.

4. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что многочлен $\Phi_p(x) = x^{p-1} + \ldots + x + 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

Упражнения и задачи для самостоятельной тренировки перед КР 3.

1. Какие из данных подмножеств K^3 (где K — поле) являются линейными подпространствами? А какие аффинными?

а) $\{(2z+3x, z+4y, z-x+y) \,:\, x, z \in K\}$.

б) $\{(2z+3x-2, z+4y+3, z-x+y) \,:\, x, z \in K\}$.

2. Найдите все рациональные корни многочлена $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$.

3. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ имеет целый корень α. Известно, что $f(1) + f(2) = 41$ и $f(5) - f(4) = 15$. Чему может быть равен остаток α от деления на 3?

4. Докажите, что многочлен $x^4 - 12x^3 + 23x^2 + 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

5. Сколько решений имеет уравнение Сколько решений имеет уравнение $x^4 = -6$ в $\mathbb{F}_{127}$? (Разумеется, число 127 простое.)

6. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ принимает значение -1 в пяти целых точках. Докажите, что $f(x) \neq 1$ при $x \in \mathbb{Z}$.

7. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $8k + 7$.

2 семестр. Занятие 1. 10.02.2026.

1. Пусть $(G, \cdot)$ — группа. Зададим операцию $* : G \times G \to G$ формулой $a * b := b \cdot a$. Докажите, что $(G, *)$ — группа.

2. Докажите, что $\mathrm{ord(g)} = \mathrm{ord(g^{-1})}$ для любого элемента $g \in G$.

3. Группа G такова, что $a^2 = e$ для любого $a \in G$. Докажите, что G абелева.

4. Пусть G — конечная группа, $|G|$ четно. Докажите, что существует такой $a \in G$, что $a \neq e$ и $a^2 = e$.

5. Докажите, что группа простого порядка — циклическая.

6. Пусть G — группа, $a \in G$, $\mathrm{ord(a) = k}$, $\ell \in \mathbb{N}$. Докажите, что $\mathrm{ord(a^{\ell}) = \frac{k}{(k,\ell)}}$.

7. Какие элементы C_n порождают ее при

а) $n \in \mathbb{P}$;

б) произвольном n?

2 семестр. Занятие 3. 03.03.2026.

0. Ищем подгруппы S_4.

1. Пусть A, B, C — группы, а $\varphi : A \to B$ и $\psi : B \to C$ — гомоморфизмы групп.

а) Докажите, что если $\psi \cdot \varphi$ — мономорфизм, то и φ — мономорфизм.

б) Докажите, что если $\psi \cdot \varphi$ — эпиморфизм, то и ψ — эпиморфизм.

2. а) Докажите, что $[S_n, S_n] < A_n$.

б) Докажите, что $[S_n, S_n] = A_n$.

3. $H < G$, $(G : H) = 2$. Докажите, что $H \lhd G$.

4. G — группа, $|G| = pq$, гда $p, q \in \mathbb{P}$, $p < q$. Пусть $H < G$, $|H| = q$. Докажите, что $H \lhd G$.

2 семестр. Занятие 4. 10.03.2026.

1. Пусть K — коммутативное кольцо с 1. Найдите все матрицы $A \in M_n(K)$, которые коммутируют со всеми матрицами (то есть, $AB = BA$ для любой $B \in M_n(K)$).

2. С каким знаком входит в определитель матрицы $n \times n$ произведение элементов *побочной диагонали* (содержащей элементы $a_{n,1}$, $a_{n-1,2}$, $\ldots a_{1,n}$)?

3. Матрица $A \in M_n(\mathrm{C})$ такова, что $a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$. Докажите, что $\det(A) \in \mathbb{R}$.

4. Найдите определитель : $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & y \\ y & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix}$.

5. Найдите определитель (числа $a_1, \ldots, a_n$ считаются известными): $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ & & & \ldots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

2 семестр. Остатки.

4-1. Пусть K — коммутативное кольцо с 1. Найдите все матрицы $A \in M_n(K)$, которые коммутируют со всеми матрицами (то есть, $AB = BA$ для любой $B \in M_n(K)$).

4-5. Докажите, что $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ & & & \dots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j)$.

1. Найдите $\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$ (определитель матрицы из $M_n(\mathbb{R})$).

2. Найдите определитель : $\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ & & \dots & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}$.

3. Найдите определитель : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \mathrm{C}_2^1 & \mathrm{C}_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \mathrm{C}_3^1 & \mathrm{C}_3^2 & \mathrm{C}_3^3 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \\ 1 & \mathrm{C}_\mathrm{n}^1 & \mathrm{C}_\mathrm{n}^2 & \mathrm{C}_\mathrm{n}^3 & \dots & \mathrm{C}_\mathrm{n}^{\mathrm{n}-1} \end{vmatrix}$.

2 семестр. Остатки.

4-1. Пусть K — коммутативное кольцо с 1. Найдите все матрицы $A \in M_n(K)$, которые коммутируют со всеми матрицами (то есть, $AB = BA$ для любой $B \in M_n(K)$).

5-3. Найдите определитель : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \mathrm{C}_2^1 & \mathrm{C}_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \mathrm{C}_3^1 & \mathrm{C}_3^2 & \mathrm{C}_3^3 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \\ 1 & \mathrm{C}_n^1 & \mathrm{C}_n^2 & \mathrm{C}_n^3 & \dots & \mathrm{C}_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

2 семестр. Занятие 4. 24.03.2026.

1. Найдите собственные числа матрицы $\begin{matrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$

2 семестр. Задачи для подготовки к КР 1. 28.03.2026.

М1. В матрице $A \in M_n(K)$ сначала переставили в обратном порядке все столбцы, а потом переставили в обратном порядке все строки. Как изменился $\det(A)$?

М2. Найдите определитель матрицы из $M_{n+1}(\mathbb{R})$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mathrm{C}^1_{\mathrm{m}} & \mathrm{C}^1_{\mathrm{m+1}} & \dots & \mathrm{C}^1_{\mathrm{m+n}} \\ \mathrm{C}^2_{\mathrm{m+1}} & \mathrm{C}^2_{\mathrm{m+2}} & \dots & \mathrm{C}^2_{\mathrm{m+n+1}} \\ & & \dots & \\ \mathrm{C}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{m+n-1}} & \mathrm{C}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{m+n}} & \dots & \mathrm{C}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{m+2n-1}} \end{vmatrix}$.

М3. Найдите $\Delta_n = \begin{vmatrix} 12 & 9 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 9 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 12 \end{vmatrix}$ (определитель матрицы из $M_n(\mathbb{R})$).

Г1. Пусть $\varphi_{a,b}(x) = ax + b$, а $G = \{\varphi_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\,, a \neq 0\}$.
а) Докажите, что G — группа относительно композиции.
б) Является ли $H = \{\varphi_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$ подгруппой G?
в) Является ли $F = \{\varphi_{b,b} \mid b \in \mathbb{R}\,, b \neq 0\}$ подгруппой G?

Г2. Пусть $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм групп, причем группа G — абелева. Докажите, что $\mathrm{Im}(\varphi)$ абелева.

Г3. Порождается ли группа S_9 подстановками (239) и (124536897)?

Г4. Найдите максимальный порядок элемента из а) S_5; б) A_5.

Г5. Пусть $H \lhd G$, $(G : H) = 5$. Докажите, что $[G, G] < H$.

Г6. Докажите, что любая бесконечная группа имеет бесконечно много подгрупп.

2 семестр. Занятие 9. 08.04.2024.

П3. Пусть U, V — конечномерные линейные пространства над K, а $\psi : U \to V$ — линейное отображение. Для каждого из двух следущих равенств, докажите или опровергните его. Если равенство неверное, то докажите вместо него верное включение (в одну из сторон) и приведети контрпример к обратному включению.

а) Если $U_1, U_2 \leq U$, то $\psi(U_1 \cap U_2) = \psi(U_1) \cap \psi(U_2)$.

б) Если $V_1, V_2 \leq V$, то $\psi^{-1}(V_1 \cap V_2) = \psi^{-1}(V_1) \cap \psi^{-1}(V_2)$.

1. Приведите квадратичную форму к диагональному виду невырожденным преобразованием переменных: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 2x_1x_2 + x_3x_4 - x_1x_5 + 6x_6^2$.

2. Пусть V — конечномерное линейное пространство над K, а $\psi \in \mathrm{End(V)}$ — обратимый оператор.

а) Докажите, что $0 \notin \mathrm{Spec}(\psi)$.

б) Пусть $\mathrm{Spec}(\psi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mathrm{k}}\}$. Найдите $\mathrm{Spec}(\psi^{-1})$.

в) Пусть кратность каждого собственного числа λ_i у оператора ψ равна m_i. найдите кратности собственных чисел ψ^{-1}.

2 семестр. Занятие 10. 21.04.2024.

1. Найдите ЖНФ оператора, заданного следующей матрицы, а также Жорданов базис.

$$\begin{matrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

2. Матрица $J_n(\lambda)$ — это жорданова клетка $n \times n$ с λ на диагонали. Найдите $(J_n(\lambda))^k$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

2 семестр. Занятие 05.05.2026.

9-2в. Пусть V — конечномерное линейное пространство над K, а $\psi \in \mathrm{End(V)}$ — обратимый оператор, $\mathrm{Spec}(\psi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{k}\}$. Пусть кратность каждого собственного числа λ_i у оператора ψ равна m_i. найдите кратности собственных чисел ψ^{-1}.

1. Будет ли скалярным произведением:

а) $(x, y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2$ в $\mathbb{R}^2$

б) $(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B)$ в пространстве матриц $M_n(\mathbb{R})$

3. Пусть $A \in M_n(\mathrm{C})$, $k \in \mathbb{N}$, $A^k = E_n$.

а) Докажите, что все собственные числа A — корни из 1.

б) Докажите, что A диагонализируема.

4. а) Докажите, что $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)\mathbb{F}_2(x)$.

б) Найдите в $\mathbb{F}_{16}$ обратный элемент к $x^2 + x$ (используем представление пункта а).

в) Вычислите в $\mathbb{F}_{16}$ выражение $\frac{x^5+2x+1}{x^2+x}$.