Алгебра. Глава 4. Многочлены и теория чисел.

Д. В. Карпов

2024

Показатель, к которому принадлежит вычет

Определение

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$, $d \in \mathbb{N}$. Вычет a *принадлежит к показателю d*, если $a^d = 1$, но $a^s \neq 1$ при $s \in \mathbb{N}$, $s < d$.
Обозначение: $a \in_p d$.

Лемма 1

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{Z}_p$. Тогда выполнены следующие утверждения.

1) *Если $a^d = 1$ и $a \in_p s$, то $s \mid d$.*

2) *Если $a \in_p d$, то $d \mid p - 1$.*

Доказательство. 1) • Предположим противное и поделим d на s с остатком: $d = sq + r$, $0 < r < s$.

• Тогда $1 = a^d = a^{sq+r} = (a^s)^q \cdot a^r = a^r$,

что противоречит минимальности s.

2) По теореме Эйлера $a^{p-1} = 1$. Тогда по пункту 1 имеем $d \mid p - 1$.

Лемма 2

Если $p \in \mathbb{P}$ и $d \mid p-1$, то многочлен $t^d - 1 \in \mathbb{Z}_p[t]$ имеет ровно d корней, все они не 0.

Доказательство. • Многочлен $t^{p-1} - 1$ имеет в $\mathbb{Z}_p[t]$ ровно $p-1$ корень (по теореме Эйлера, все ненулевые вычеты его корни).

• Пусть $p - 1 = qd$. Тогда
$t^{p-1} - 1 = (t^d - 1)(t^{(q-1)d} + \dots + t^d + 1) =: (t^d - 1)f(t)$.

• Так как $\deg(f) = (q-1)d$, этот многочлен по Теореме 3.7 имеет не более $(q-1)d$ корней.

• Если $t^d - 1$ имеет менее d корней, то $t^{p-1} - 1 = (t^d - 1)f(t)$ имеет менее $d + (q-1)d = p - 1$ корней, противоречие. $\square$

Теорема 1

Если $p \in \mathbb{P}$ и $d \mid p-1$, то к показателю d принадлежит ровно $\varphi(d)$ вычетов.

Доказательство. • Индукция по d. База $d=1$ очевидна: $a \in_p 1 \iff a=1$.

• Все вычеты, принадлежащие к показателю d, являются корнями многочлена t^d-1.

• Если $s \mid d$ (скажем, $d=qs$) и $b \in_p s$, то $b^d=(b^s)^q=1$, то есть, b — корень t^d-1.

• Так как каждый ненулевой вычет принадлежит в точности одному показателю, вычеты, принадлежащие собственным делителям d дают нам

$$\sum_{s \mid d,\, s<d} \varphi(s) = \left(\sum_{s \mid d} \varphi(s)\right) - \varphi(d) = d - \varphi(d) \quad \text{различных}$$

корней многочлена t^d-1 (последнее равенство верно по Теореме 2.17).

• Оставшиеся $d-(d-\varphi(d))=\varphi(d)$ корней многочлена t^d-1 принадлежат к d (по Лемме 1 они должны принадлежать к делителю d, а этим делителем может быть только само d). □

Первообразный корень по модулю p

Определение

Пусть $p \in \mathbb{P}$. Вычет $a \in \mathbb{Z}_p$ — первообразный корень по модулю p, если $a \in_p p-1$.

• По Теореме 1 существует в точности $\varphi(p-1)$ первообразных корней по модулю p.

Теорема 2

Пусть $p \in \mathbb{P}$, a — первообразный корень по модулю p. Тогда a, a^2, ..., $a^{p-1} = 1$ — ПрСВ $\pmod p$, то есть, в точности все ненулевые вычеты из $\mathbb{Z}_p$.

Доказательство. • Достаточно доказать, что $a^i \neq a^j$ при $1 \le j < i \le p-1$.

• Предположим противное, пусть $a^i = a^j \iff a^j(a^{i-j} - 1) = 0$.

• Однако, $a^j \neq 0$ и $a^{i-j} \neq 1$, так как $0 < i-j < p-1$. Противоречие. □

• Если a — первообразный корень по модулю p, то любой ненулевой вычет $b \in \mathbb{Z}_p$ представляется в виде $b = a^k$, где $1 \le k \le p-1$.

Квадратичные вычеты и невычеты в $\mathbb{Z}_p$

Определение

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$.

- Тогда a — квадратичный вычет, если существует такой $b \in \mathbb{Z}_p$, что $b^2 = a$.
- Если такого b не существует, то a — квадратичный невычет.
- Далее в этом разделе p — нечетное простое число.

Лемма 3

Пусть $p \in \mathbb{P}$ нечетно, $p_1 := \frac{p-1}{2}$. Тогда:

1) квадратичные вычеты в $\mathbb{Z}_p$ — корни многочлена $t^{p_1} - 1$;

2) если $x^2 = y^2$, то $x = y$ или $x = -y$;

3) существует в точности $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов в $\mathbb{Z}_p$.

Доказательство. 1) • Если a — квадратичный вычет, то $a = b^2$ в $\mathbb{Z}_p$.

• По Теореме Эйлера $a^{p_1} - 1 = b^{2p_1} - 1 = b^{p-1} - 1 = 0$.

2)

$x^2 = y^2 \iff (x+y)(x-y) = 0 \iff x = y$ или $x = -y$.

3) Из пункта 2 следует, что ненулевые вычеты из $\mathbb{Z}_p$ разбиваются на $\frac{p-1}{2}$ пар вида $\{x, -x\}$, дающих одинаковый квадрат. Значит, существует ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов по модулю p. □

Лемма 4

Пусть $p \in \mathbb{P}$ нечетно, $p_1 := \frac{p-1}{2}$. Тогда выполнены следующие утверждения.

1) Квадратичные невычеты в $\mathbb{Z}_p$ — корни многочлена $t^{p_1}+1$.

2) Существует в точности $\frac{p-1}{2}$ квадратичных невычетов в $\mathbb{Z}_p$.

Доказательство. • По Теореме Эйлера многочлен $t^{p-1}-1=(t^{p_1}-1)(t^{p_1}+1)$ имеет в $\mathbb{Z}_p$ ровно $p-1$ корень — все ненулевые вычеты.

• Многочлен $t^{p_1}-1$ имеет ровно p_1 корней, как мы знаем из Леммы 2. По Лемме 3 все эти корни — квадратичные вычеты.

• Все p_1 ненулевых вычетов, не являющиеся корнями $t^{p_1}-1$, являются корнями многочлена $t^{p_1}+1$.

• Значит, и многочлен $t^{p_1}+1$ имеет ровно p_1 корней — в точности все квадратичные невычеты. □

Лемма 5

Пусть $p \in \mathbb{P}$ *нечетно,* $a, b \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. *Тогда:*

1) *Если* a, b *— квадратичные вычеты, то* ab *— квадратичный вычет.*

2) *Если* a *— квадратичный вычет, а* b *— квадратичный невычет, то* ab *— квадратичный невычет.*

3) *Если* a, b *— квадратичные невычеты, то* ab *— квадратичный вычет.*

Доказательство. 1) Существуют такие $x, y \in \mathbb{Z}_p$, что $a = x^2$ и $b = y^2$. Тогда $ab = (xy)^2$.

2) • Вычеты $a, 2a, \dots, (p-1)a$ — это в точности все ненулевые элементы $\mathbb{Z}_p$: среди них нет 0 и все они различны, так как $ai = aj \Rightarrow i = j$ (равенство можно домножить на a^{-1}.)

• Значит, среди $a, 2a, \dots, (p-1)a$ ровно по $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и квадратичных невычетов.

• Так как при умножении a на квадратичные вычеты (на все $\frac{p-1}{2}$ штук) по пункту 1 получаются различные квадратичные вычеты (все $\frac{p-1}{2}$ штук), то при умножении a на квадратичные невычеты получаются квадратичные невычеты.

3) • И на этот раз $a, 2a, \dots a(p-1)$ — это в точности все ненулевые элементы $\mathbb{Z}_p$, среди них ровно по $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и квадратичных невычетов.

• Так как при умножении a на квадратичные вычеты (на все $\frac{p-1}{2}$ штук) по пункту 2 получаются различные квадратичные невычеты (все $\frac{p-1}{2}$ штук), то при умножении a на квадратичные невычеты получаются квадратичные вычеты. $\square$

Решение квадратных уравнений в $\mathbb{Z}_p$

- Пусть $p \in \mathbb{P}$, $p \neq 2$, $a, b, c \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

- Если D — квадратичный вычет, то $D = d^2$ для некоторого $d \in \mathbb{Z}_p$ и $\frac{D}{4a^2} = \left(\frac{\pm d}{2a}\right)^2$. Тогда уравнение имеет два решения:

$$x_1 = \tfrac{-b+d}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \tfrac{-b-d}{2a}.$$

- Если $D = 0$, то уравнение имеет одно решение:

$$x_1 = \tfrac{-b}{2a}.$$

- Если D — квадратичный невычет, то $\frac{D}{4a^2}$ — также квадратичный невычет, а значит, решений нет (так как квадратичный невычет не может быть равен квадрату).

Квадратичные вычеты по модулю p. Символ Лежандра

Определение

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \not\vdots\, p$.

• Тогда a — квадратичный вычет по модулю p, если вычет a в $\mathbb{Z}_p$ — квадратичный вычет.

• Аналогично, a — квадратичный невычет по модулю p, если вычет a в $\mathbb{Z}_p$ — квадратичный невычет.

Определение

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{Z}$. Тогда символ Лежандра

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \text{ — квадратичный вычет по модулю } p; \\ -1, & \text{если } a \text{ — квадратичный невычет по модулю } p; \\ 0, & \text{если } a \,\vdots\, p. \end{cases}$$

Свойство 1

$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

Доказательство. • a — квадратичный вычет по модулю p $\iff$ $\overline{a}$ — квадратичный вычет в $\mathbb{Z}_p$ $\iff$ $(\overline{a})^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

• a — квадратичный невычет по модулю p $\iff$ $\overline{a}$ — квадратичный невычет в $\mathbb{Z}_p$ $\iff$ $(\overline{a})^{\frac{p-1}{2}} = -1$.

• $a = 0 \iff a^{\frac{p-1}{2}} = 0$. □

Свойство 2

(Первое дополнение к закону взаимности Гаусса.)
$\left(\frac{-1}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

Свойство 3

$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$.

Доказательство. • Следует из Леммы 5 и определения символа Лежандра. □

Лемма 6

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $p_1 = \frac{p-1}{2}$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \not\vdots\, p$. *Тогда*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{2ax}{p}\right]}.$$

Доказательство. • Пусть $M = \{1, 2, \dots, p_1\}$.

Утверждение 1

Для каждого $j \in M$ *существует* $s_j \in \{0, 1\}$ *и* $r_j \in M$ *такие, что* $ja \equiv (-1)^{s_j} r_j \pmod{p}$.

Доказательство. • Пусть r_j' — остаток от деления ja на p.

• Если $r_j' \in M$, то положим $r_j := r_j'$, $s_j = 0$.

• Если $r_j' \notin M$, то $r_j' \in \{p_1 + 1, \dots, p - 1\}$, тогда $p - r_j' \in \{1, \dots, p - 1 - p_1 = p_1\} = M$.

• В этом случае положим $r_j = p - r_j'$, $s_j = 1$. □

Утверждение 2

Если $i, j \in M$, $i \neq j$, то $r_i \neq r_j$.

Доказательство. • Предположим противное, пусть $r_i = r_j$.

• Если $s_i = s_j$, то $r'_i = r'_j$.

• Следовательно, $ia \equiv_p ja \iff a(i-j) \vdots p \Rightarrow i-j \vdots p$, что не так (последний переход верен, так как $(a,p)=1$).

• Если $s_i \neq s_j$, то $r'_i = p - r'_j$.

• Следовательно, $ia \equiv_p -ja \iff a(i+j) \vdots p \Rightarrow i+j \vdots p$, что не так: $2 \leq i+j \leq 2p_1 = p-1$. □

Утверждение 3

$s_j = 1 \iff [\frac{2aj}{p}] \not\vdots\ 2.$

Доказательство. • Напомним, что

$aj = pq + r_j' \iff 2aj = 2pq + 2r_j'$, где $r_j' \in \{1, \dots, p-1\}$.

$$s_j = 1 \iff \frac{p+1}{2} = p_1 + 1 \le r_j' \le p - 1 \iff$$

$$p+1 \le 2r_j' \le 2p-2 \iff p+1+2pq \le 2aj \le 2p-2+2pq \iff$$

$$p + 2pq < 2aj < 2p + 2pq \iff$$

$$2q + 1 < \frac{2aj}{p} < 2q + 2 \iff \left[\frac{2aj}{p}\right] = 2q + 1 \not\vdots\ 2.$$

• Пояснение 1. Так как разность целых чисел не менее 1,

$p + 1 + 2pq \le 2aj \iff p + 2pq < 2aj$.

• Пояснение 2. Так как разность четных чисел не менее 2,

$2aj \le 2p - 2 + 2pq \iff 2aj < 2p + 2pq$. □

- Вернемся к доказательству Леммы 6. По Утверждению 2, $\{r_1, \ldots, r_{p_1}\} = M$ (так как все эти числа из M и различны, а $|M| = p_1$).
- Пусть $R = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p_1$. Тогда $r_1 r_2 \cdot \dots \cdot r_{p_1} = R$.
- Напишем цепочку сравнений:

$$(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1} s_x} R \equiv (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1} s_x} \cdot \prod_{x=1}^{p_1} r_x \equiv$$

$$\prod_{x=1}^{p_1} (-1)^{s_x} r_x \equiv \prod_{x=1}^{p_1} ax \pmod p \equiv a^{p_1} R \pmod p \qquad (1).$$

- Сокращая (1) на R (можно, так как $(R, p) = 1$),

получаем $\quad a^{p_1} \equiv (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1} s_x} \equiv (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1} [\frac{2ax}{p}]} \pmod p$ (последний переход верен по Утверждению 3). $\square$

Лемма 7

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $p_1 = \frac{p-1}{2}$.

1) **(Второе дополнение к закону взаимности Гаусса.)** $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

2) *Пусть* $a \in \mathbb{Z}$, $a \not\vdots\, p$ *и* $a \not\vdots\, 2$. *Тогда* $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1} \left[\frac{ax}{p}\right]}$.

Доказательство. 1) • Тогда $\frac{p+a}{2} \in \mathbb{Z}$, применим Лемму 6:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{p+a}{p}\right) = \left(\frac{2\frac{p+a}{2}}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{\frac{p+a}{2}}{p}\right) =$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) \cdot (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{2x\frac{p+a}{2}}{p}\right]} = \left(\frac{2}{p}\right) \cdot (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left(x+\left[\frac{ax}{p}\right]\right)} =$$

$$\left(\frac{2}{p}\right)\cdot(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1} x}\cdot(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{ax}{p}\right]} = \left(\frac{2}{p}\right)\cdot(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\cdot(-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}\left[\frac{ax}{p}\right]}. \qquad (1)$$

• Подставим $a = 1$ в (1) и учтем, что при $1 \le x \le p_1$ выполнено $\left[\frac{x}{p}\right] = 0$:

$1 = \left(\frac{1}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) \cdot (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$, откуда следует, что $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.

2) Теперь (1) можно продолжить так:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) \cdot (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \cdot (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}[\frac{ax}{p}]} =$$

$$\left((-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\right)^2 \cdot (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}[\frac{ax}{p}]} = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}[\frac{ax}{p}]}. \qquad \square$$

Теорема 3

(Закон взаимности Гаусса.)

Пусть $p, q \in \mathbb{P}$ нечетны. Тогда $\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$.

Доказательство. • Пусть $p_1 := \frac{p-1}{2}$ и $q_1 := \frac{q-1}{2}$.

• По Лемме 7, $\quad \left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum\limits_{x=1}^{p_1}[\frac{qx}{p}] + \sum\limits_{y=1}^{q_1}[\frac{py}{q}]}$.

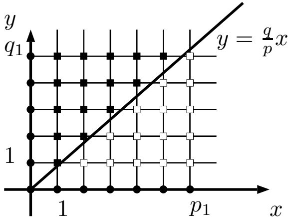
• Нам нужно доказать, что $\sum\limits_{x=1}^{p_1}[\frac{qx}{p}] + \sum\limits_{y=1}^{q_1}[\frac{py}{q}] = p_1 q_1$.

• Рассмотрим клетчатую решетку, проведем на ней прямую ℓ, заданную уравнением $y = \frac{q}{p}x$.

• Так как $(p, q) = 1$, при $x \le p_1$ на этой прямой нет узлов — точек с целыми координатами. Аналогично, при $y \le q_1$ на это прямой нет узлов. (Ближайший к началу координат узел в 1 четверти на ℓ — это точка с координатами $x = p$, $y = q$.)

• На вертикалях с абсциссами $x \in \{1, 2, \dots, p_1\}$ отметим все узлы с положительными ординатами, лежащие под прямой ℓ (белые квадратики на рисунке). На вертикали с абсциссой x отмечено в точности $[\frac{qx}{p}]$ узлов.

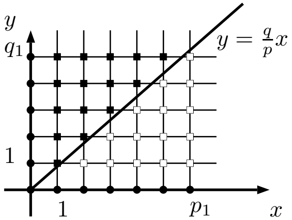
• На горизонталях с ординатами $y \in \{1, 2, \dots, q_1\}$ отметим все узлы с положительными абсциссами, лежащие над прямой ℓ (черные квадратики на рисунке). На вертикали с ординатой y отмечено в точности $[\frac{py}{q}]$ узлов.



- В сумме мы отметили ровно $\sum_{x=1}^{p_1}[\frac{qx}{p}]+\sum_{y=1}^{q_1}[\frac{py}{q}]$ узлов.

- Так как прямая ℓ не проходит через узлы с рассматриваемыми абсциссами и ординатами, каждый узел с абсциссой от 1 до p_1 и с ординатой от 1 до q_1 отмечен ровно один раз (он либо над ℓ, либо под ℓ).

- Значит, отмечено ровно p_1q_1 узлов. $\square$



Кольцо многочленов $\mathbb{Z}[t]$. Содержание многочлена.

Определение

Пусть $f(t) = a_n t^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$. Тогда его содержание $c(f) = (a_0, \dots, a_n)$ (НОД коэффициентов).

Лемма 8

(Лемма Гаусса.) *Пусть* $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, $c(f) = c(g) = 1$. *Тогда* $c(fg) = 1$.

Доказательство. • Предположим противное и рассмотрим такое $p \in \mathbb{P}$, что $c(fg) \vdots p$. Однако, $c(f) \not\vdots\, p$ и $c(g) \not\vdots\, p$.

• Пусть $f(t) = a_n t^n + \dots + a_0$ и $g(t) = b_m t^m + \dots + b_0$. Рассмотрим такой наименьший индекс k, что $a_k \not\vdots\, p$ и такой наименьший индекс ℓ, что $b_\ell \not\vdots\, p$.

• Пусть $fg = d_{m+n} t^{n+m} + \dots + d_0$. Тогда

$$d_{k+\ell} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i b_{k+\ell-i}\right) + a_k b_\ell + \left(\sum_{i=k+1}^{k+\ell} a_i b_{k+\ell-i}\right) \not\vdots\, p,$$

так как первая сумма делится на p ($a_i \vdots p$ при $i \in \{0, \dots, k-1\}$) и вторая сумма делится на p (при $i \in \{k+1, \dots, k+\ell\}$ мы имеем $k + \ell - i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$, а значит, $b_{k+\ell-i} \vdots p$), а $a_k b_\ell \not\vdots\, p$.

• Значит, $c(fg) \not\vdots\, p$, противоречие.

Следствие 1

Для $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ *выполнено* $c(fg) = c(f)c(g)$.

Доказательство. • Пусть $f(t) = c(f) \cdot f_1(t)$ и $g(t) = c(g) \cdot g_1(t)$.

• Тогда $f_1, g_1 \in \mathbb{Z}[t]$ и $c(f_1) = c(g_1) = 1$ и по Лемме Гаусса $c(f_1 g_1) = 1$.

• Следовательно, $c(fg) = c(c(f) \cdot f_1 \cdot c(g) \cdot g_1) = c(f)c(g) \cdot c(f_1 g_1) = c(f)c(g)$ (мы воспользовались тем, что общий множитель $c(f)c(g)$ при вычислении НОД коэффициентов можно вынести). $\square$

Лемма 9

Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$, $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}[x]$, $f = q_1 \dots q_n$, $\deg(q_i) \ge 1$ *для всех* $i \in \{1, \dots, n\}$. *Тогда существуют такие* $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}[x]$ *и* $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Q}$, *что* $\quad f = p_1 \dots p_n$
и $\quad p_i = c_i q_i \quad$ *для всех* $i \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. • Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ представим все коэффициенты q_i в виде несократимых дробей, пусть m_i — НОК знаменателей этих коэффициентов.

• Тогда $g_i = m_i q_i \in \mathbb{Z}[x]$ и $mf = g_1 \dots g_n$, где $m = m_1 \dots m_n \in \mathbb{N}$.

Утверждение

Пусть $mf = g_1 \dots g_n$, *где* $m \in \mathbb{N}$, $f, g_1, \dots, g_n \in \mathbb{Z}[x]$. *Тогда существует разложение* $f = p_1 \dots p_n$, *где* $p_i = d_i g_i \in \mathbb{Z}[x]$, $d_i \in \mathbb{Q}$ *для всех* $i \in \{1, \dots, n\}$.

Доказательство. Индукция по m.

База $m = 1$: построенное разложение $f = g_1 \dots g_n$ подходит.

Переход. • Пусть для меньших m утверждение доказано, $p \in \mathbb{P}$, $m \vdots p$.

• Тогда $c(g_1) \dots c(g_n) = c(g_1 \dots g_n) = c(m \cdot f) \vdots p$, значит, существует такое $i \in \{1, \dots, n\}$, что $c(g_i) \vdots p$.

• НУО $c(g_1) \vdots p$. Тогда $g_1 = p \cdot g_1^*$, где $g_1^* \in \mathbb{Z}[x]$.

• Пусть $m^* := \frac{m}{p}$. Тогда $m^* \in \mathbb{Z}$ и $m^* f = g_1^* g_2 \dots g_n$.

• Так как $m^* < m$, по индукционному предположению существует разложение $f = p_1 \dots p_n$, где $p_1 = d_1^* g_1^*$ и $p_i = d_i g_i$ при $i \in \{2, \dots, n\}$.

• Положим $d_1 := \frac{d_1^*}{p}$. Тогда $p_1 = d_1 g_1$, получено разложение для m. $\square$

• Для завершения доказательства леммы остается положить $c_i := d_i m_i$. $\square$

Связь неприводимости в $\mathbb{Q}[x]$ и в $\mathbb{Z}[x]$

• Если многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$, то он, очевидно, неприводим и в $\mathbb{Z}[x]$.

Следствие 2

Многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$, если и только если он неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

Доказательство. $\Rightarrow$. Если многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ приводим в $\mathbb{Z}[x]$, то он, очевидно, приводим и в $\mathbb{Q}[x]$.

$\Leftarrow$. • Предположим противное, пусть f приводим в $\mathbb{Q}[x]$.

• Тогда $f = g_1g_2$, где $g_1, g_2 \in \mathbb{Q}[x]$, $1 \le \deg(g_1) < \deg(f)$ и $1 \le \deg(g_2) < \deg(f)$.

• По Лемме 9, существует разложение $f = h_1h_2$, где $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}[x]$, $h_1 = cg_1$ и $h_2 = c'g_2$, $c, c' \in \mathbb{Q}$.

• Тогда f приводим в $\mathbb{Z}[x]$, противоречие. $\square$

Основная теорема арифметики в $\mathbb{Z}[t]$

Определение

Многочлен $f \in \mathbb{Z}[t]$ — *тривиальный*, если $c(f) = 1$.

Теорема 4

Любой многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ с положительным старшим коэффициентом раскладывается в произведение $f = r_1 \dots r_k \cdot p_1 \dots, p_n$, где $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{P}$, а $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}[x]$ — тривиальные неприводимые многочлены с положительными старшими коэффициентами. Разложение единственно с точностью до перестановки сомножителей.

• Разумеется, многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ с отрицательным старшим коэффициентом раскладывается в аналогичное произведение $f = -r_1 \dots r_k \cdot p_1 \dots, p_n$.

Доказательство. $\exists$ • Пусть $f = c(f) \cdot g$, тогда $g \in \mathbb{Z}[x]$ и $c(g) = 1$. По ОТА в $\mathbb{Z}$ существует разложение на простые множители $c(f) = r_1 \dots r_k$.

- Пусть a — старший коэффициент g. Тогда $a > 0$.
- По ОТА в $\mathbb{Q}[x]$ существует разложение $g = aq'_1 q_2 \dots q_n$, где $q'_1, q_2, \dots, q_n$ — неприводимые в $\mathbb{Q}[x]$ многочлены.
- Положим $q_1 := aq'_1$, тогда q_1 также неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.
- Итак, $g = q_1 q_2 \dots q_n$.
- По Лемме 9 существует разложение $g = p_1 \dots p_n$, где $p_i \in \mathbb{Z}[x]$ и $p_i = c_i q_i$, $c_i \in \mathbb{Q}$.
- Можно считать, что старший коэффициент каждого p_i положителен: иначе заменим p_i на $-p_i$ и c_i на $-c_i$.
- Так как $p_i \sim q_i$ в $\mathbb{Q}[x]$, многочлены $p_1, \dots, p_n$ неприводимы в $\mathbb{Q}[x]$, а значит, и в $\mathbb{Z}[x]$.
- Тогда $f = r_1 \dots r_k \cdot p_1 \dots p_n$.
- По Следствию 1 имеем $c(f) = c(r_1 \dots r_k \cdot p_1 \dots p_n) = r_1 \dots r_k \cdot c(p_1) \dots c(p_n) = c(f) \cdot c(p_1) \dots c(p_n)$, откуда $c(p_1) = \dots c(p_n) = 1$.
- Значит, $f = r_1 \dots r_k \cdot p_1 \dots p_n$.— искомое разложение.

! • Предположим, что разложение не единственно:

$$f = r_1 \dots r_k p_1 \dots p_n = s_1 \dots s_\ell q_1 \dots q_m, \qquad (1)$$

где $r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_\ell \in \mathbb{P}$ и $p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_m \in \mathbb{Z}[x]$ — неприводимые тривиальные многочлены с положительными старшими коэффициентами.

• По Лемме 8, тогда $c(p_1 \dots p_n) = c(p_1) \dots c(p_n) = 1$, откуда $c(f) = r_1 \dots r_k$ — разложение на простые множители. Аналогично, $c(f) = s_1 \dots s_\ell$ — разложение на простые множители.

• По ОТА в $\mathbb{Z}$, эти разложения могут отличаться только порядком множителей, что нам и надо.

• Пусть $g := \frac{1}{c(f)} f \in \mathbb{Z}[x]$, тогда $g = p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_m$ — два разложения g в произведение неприводимых в $\mathbb{Z}[x]$ тривиальных многочленов.

• По Следствию 2 это два разложения g в произведение неприводимых многочленов в $\mathbb{Q}[x]$.

- Пусть p_i^* — многочлен, полученный из p_i делением на старший коэффициент (для всех $i \in \{1, \dots, n\}$), а q_j^* — многочлен, полученный из q_j делением на старший коэффициент (для всех $j \in \{1, \dots, m\}$), а a — старший коэффициент f.
- Тогда $g = ap_1^* \dots p_n^* = aq_1^* \dots q_m^*$ — два разложения g в $\mathbb{Q}[x]$ в произведение неприводимых многочленов со старшим коэффициентом 1, а по ОТА в $\mathbb{Q}[x]$ (Теорема 3.5) такие разложения могут отличаться лишь порядком сомножителей.
- Значит, $m = n$ и можно считать, что $p_i^* = q_i^*$ для всех i.
- Тогда существует такое $c_i \in \mathbb{Q}$, что $p_i = c_i q_i$. Тогда $c_i > 0$ (так как c_i равно отношению положительных старших коэффициентов p_i и q_i).
- Нам остается доказать, что $c_1 = \dots = c_n = 1$. Пусть это не так. Из (1) ясно, что $c_1 c_2 \dots c_n = 1$. Значит, НУО $c_1 > 1$.
- Пусть $c_1 = \frac{a_1}{b_1}$ — представление в виде несократимой дроби. Тогда $(a_1, b_1) = 1$, $a_1 > 1$.
- Пусть $q_1(t) = d_w t^w + \dots + d_0$, тогда $p_1(t) = \frac{a_1 d_w}{b_1} t^w + \dots + \frac{a_1 d_0}{b_1}$.
- Так как $(a_1, b_1) = 1$, для всех $i \in \{1, \dots, w\}$ мы имеем $\frac{a_1 d_i}{b_1} \,\vdots\, a_1$. Значит, $1 = c(p_1) \,\vdots\, a_1$, противоречие.

Критерий Эйзенштейна

Теорема 5

Пусть $f(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$ и $p \in \mathbb{P}$ таковы, что $a_n \not\vdots\, p$, $a_{n-1}, \dots, a_0 \,\vdots\, p$ и $a_0 \not\vdots\, p^2$. Тогда f — неприводим в $\mathbb{Z}[t]$.

Доказательство. • Предположим противное. Пусть $f = gh$, где $\deg(g) > 0$ и $\deg(h) > 0$.

• Пусть $g(t) = b_m t^m + \dots + b_0$, $h(t) = c_k t^k + \dots + c_0$ (тогда $m + k = n$).

• Так как $c_0 b_0 = a_0 \,\vdots\, p$ и $c_0 b_0 \not\vdots\, p^2$, НУО $b_0 \,\vdots\, p$ и $c_0 \not\vdots\, p$.

• Так как $b_m c_k = a_n \not\vdots\, p$, мы имеем $b_m \not\vdots\, p$. Следовательно, можно выбрать наименьший такой индекс ℓ, что $b_\ell \not\vdots\, p$.

• Тогда $a_\ell = b_\ell c_0 + \sum_{i=0}^{\ell-1} b_i c_{\ell-i} \not\vdots\, p$, так как $b_\ell c_0 \not\vdots\, p$, а для всех $i \in \{0, \dots, \ell-1\}$ $b_i \,\vdots\, p$.

• Значит, $a_\ell \not\vdots\, p$. Но $\ell \le m < n$, противоречие. □

Следствие 3

Пусть $f(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$ и $p \in \mathbb{P}$ таковы, что $a_0 \not\vdots\, p$, $a_1, \dots, a_n \,\vdots\, p$ и $a_n \not\vdots\, p^2$. Тогда f — неприводим в $\mathbb{Z}[t]$.

• Доказательство аналогично Теореме 5.

Значения в целых точках многочлена из $\mathbb{Z}[t]$

Лемма 10

Пусть $f(t) = a_n t^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \neq y$. *Тогда* $f(x) - f(y) \,\vdots\, x - y$.

Доказательство. • НУО $x - y > 0$. Так как $x \equiv_{x-y} y$, для всех $k \in \{0, \dots, n\}$ выполняется $x^k \equiv_{x-y} y^k$.

• Тогда $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \equiv_{x-y} \sum_{k=0}^{n} a_k y^k = f(y)$. □

Рациональные корни многочлена из $\mathbb{Z}[t]$

Лемма 11

Пусть $f(t) = a_nt^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$, $f(\frac{p}{q}) = 0$, *где* $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$. *Тогда* $a_n \,\vdots\, q$ *и* $a_0 \,\vdots\, p$.

Доказательство.

$$0 = q^nf(\tfrac{p}{q}) = a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n. \qquad (1)$$

• Все слагаемые в правой части (1), кроме a_np^n, делятся на q, значит, и $a_np^n \,\vdots\, q$. Так как $(p, q) = 1$, получаем $a_n \,\vdots\, q$.

• Все слагаемые в правой части (1), кроме a_0q^n, делятся на p, значит, и $a_0q^n \,\vdots\, p$. Так как $(p, q) = 1$, получаем $a_0 \,\vdots\, p$. □

Следствие 4

Пусть $f(t) = t^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $f(\alpha) = 0$. *Тогда* $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. • Пусть $\alpha = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$.

• По Лемме 11, $1 \,\vdots\, q$, то есть $\alpha \in \mathbb{Z}$. □

Лемма 12

Пусть $f(t) = a_n t^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$, $f(\frac{p}{q}) = 0$, *где* $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$. *Тогда* $f(k) \vdots kq - p$ *для любого* $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. •

$$q^n f(k) = q^n\Big(f(k) - f\Big(\frac{p}{q}\Big)\Big) =$$

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} q^n a_i k^i\Big) - \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i p^i q^{n-i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} q^{n-i} a_i\big((kq)^i - p^i\big) \vdots kq - p,$$

так для всех $i \in \{1, \dots, n\}$

$(kq)^i - p^i \vdots kq - p \iff (kq)^i \equiv_{kq-p} p^i \Leftarrow kq \equiv_{kq-p} p$.

• Так как $(q^n, kq - p) = (q, p) = 1$, из $q^n f(k) \vdots kq - p$ следует, что $f(k) \vdots kq - p$.

$\square$

Разностный многочлен

Определение

Пусть $f \in K[x]$, где K — коммутативное кольцо с 1, причем $K \supset \mathbb{Z}$.

• Разностный многочлен задается формулой $\Delta f(x) := f(x+1) - f(x)$.

• Примеры подходящих колец K: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Лемма 13

Пусть $f \in K[x]$, где K — коммутативное кольцо с 1, причем $K \supset \mathbb{Z}$. Тогда $\Delta f \in K[x]$, $\deg(\Delta f) = \deg(f) - 1$.

Доказательство. • Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, где $n = \deg(f)$.

• По биному Ньютона, $a_k\big((x+1)^k - x^k\big) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_k \mathrm{C}_k^i x^{k-i}$.

• Поэтому $\Delta f \in K[x]$.

• Одночлены с x^n в Δf сокращаются, а единственный одночлен с x^{n-1} — это $a_n \mathrm{C}_n^1 x^{n-1}$ с коэффициентом $a_n \mathrm{C}_n^1 \neq 0$. Следовательно, $\deg(\Delta f) = n - 1$. $\square$